ELTE-TTK
Kémia BSc
Tantárgy: **Fizikai alapmérések labor**

HÁZI DOLGOZAT

Comment [NaSa1]: Nagyon világosan kifejtett és igényes munka. Csak egy-két kritikai megjegyzést tudtam magamból kisajtolni. Ezeket a margón megtalálod. (És még egy: a külalak már-már illetlenül tetszetős :-)
Nagyon világos az Excel is.
Maradéktalanul betartottad a formai előírásaimat, és a kísérőlevélben sem találok semmi hibát.
Te biztosan nem tartozol azok közé, akik miatt belefogtam a tánc- és illemtan + a mit-is-akar-a-Főnök magyarázgatásába.
Gratulálok a szépen elvégzett munkához!

1. mérés – Mérési adatok statisztikája

Készítette: Velicsányi Péter

EHA kód: vepraat.elte

e-mail cím: velicsanyi.peter@chello.hu

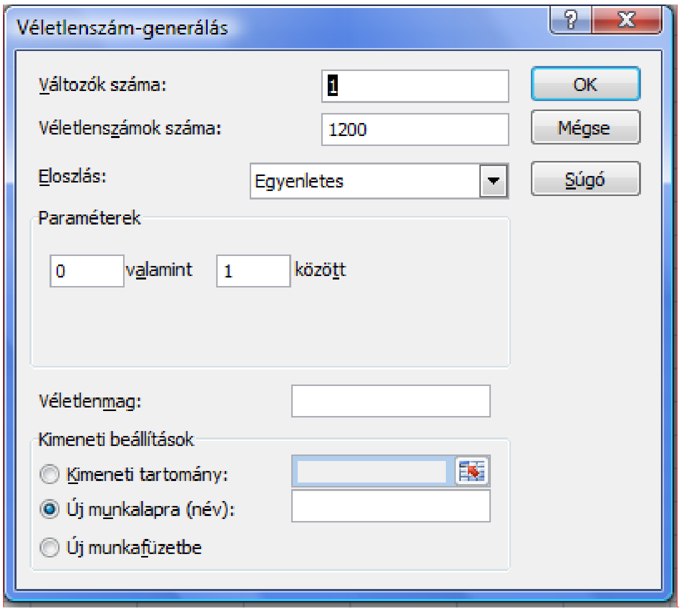
„Keddi laborcsoport”

A jelentés leadásának dátuma: 2010. március 19.

I. Kísérleti rész

1. Véletlenszám-generálás

1200 *U*(0,1) eloszlású véletlen számot generálunk Excellel. Ennek érdekében az Excel Adatelemzés menüpontja alatt található Véletlenszám-generálás lehetőséget választva azt a következőképpen töltjük ki:



1. ábra – Véletlenszám-generálás Excel segítségével

Comment [NaSa2]: Tetszik ez a kis ötlet. Lehet, hogy a Főnök magára zárja az ajtót, és maga is kipróbálja, hogy megy ez. Milyen jól hangzana pl. az Opera-bálon ez az elejtett megjegyzés: *„Éppen véletlen számokat generáltam az Excellel, amikor felhívott Barack Obama...”*

Így az A oszlopban 1200 sornyi számot kaptunk.

2. A nyers adatok létrehozása

1200 diszkrét egyenletes eloszlású számot kreálunk az előzőekben kapott számok segítségével úgy, hogy a (0,1) intervallumot 3 egyenlő részre osztjuk. Így három intervallumot kapunk. Az első intervallumba eső számokhoz 1-et, a másodikba eső számokhoz 2-t, a harmadikba eső számokhoz pedig 3-at rendelünk. Ezek a számok a B oszlopba fognak kerülni, B1-be a következő függvényt írom:

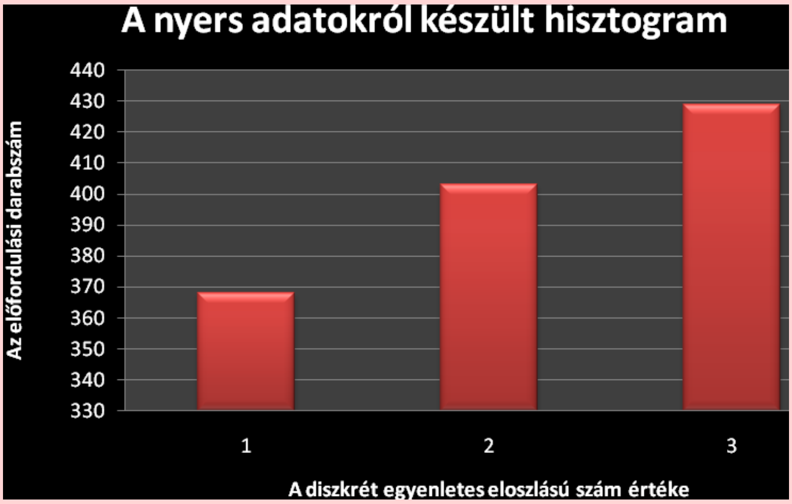
=HA(A1<1/3; 1; HA(A1<2/3; 2; 3))

Ezt a függvényt 1200-ig lemásoljuk.

II. Adatfeldolgozás

3. Hisztogram készítése a nyers adatokról

A hisztogramot a következőképpen készítjük: a DARABHATÖBB függvény (melyet a G2-be írtam) segítségével megszámolom, hány 1-es, 2-es, 3-as nyers adat van, és egy oszlopdiagramon ábrázolom ezeket az adatokat. Ez lesz a hisztogram.
A G2 cellába írt függvény: =DARABHATÖBB(B1:B1200;1)



Comment [NaSa3]: Tekintve, hogy ennek az ábrának (a későbbiekre való tekintettel) nyilván az a fő célja, hogy a Főnököt rávezesse, milyen szép egyenletes is a hisztogram által reprezentált eloszlás, célszerűbb lett volna a darabszámot 0-tól ábrázolni, mert így a különbségek ugranak ki. Netán a Főnök tendenciát olvas ki belőle, és arra gondol, bár az eladási mutatók növekednének ilyen szépen évről évre.

2. ábra: A nyers adatok hisztogramja – megmutatja, melyik adatból hány darab van

4. A nyers adatok lapján párosával összeadogatjuk a nyers adatokat. Ezért C1 cellát üresen hagyjuk, C2-be a következőt írjuk:
=B1+B2
Ezután C3-at üresen hagyva C4-be
=B3+B4-et írunk, így elérhetjük, hogy az egymás utáni nyers adatok legyenek összeadva, miután C1..C4 cellák kijelölésével azt C1200-ig lemásoljuk.
Majd hisztogramot készítünk ezekből az adatokból is az előző pontban leírt módon: megszámolom, hogy a C oszlopban a lehetséges összegekből hány darab van, és ezeket ábrázolom oszlopdiagramon. Így pl. G18-ba a következő került: =DARABHATÖBB(C1:C1200;2).

3. ábra: A párosával összeadogatott nyers adatok hisztogramja – megmutatja, melyik elvileg lehetséges összegből hány darab van

Comment [NaSa4]: Alig volt valaki, aki követte a főnöki utasítást, mely ábraszámozásról és ábraszövegről szólt. Legtöbben még az oldalakat sem számozták, holott tudhatják, hogy a Főnök mindig kinyomtatva olvassa el a jelentéseket, és nem szereti, ha a lapok össze vannak tűzve. Másrészt viszont lyukaskezű az öreg...

5. A nyers adatok lapján négyesével is összeadogatjuk a nyers adatokat. Ezért D4 cellába a következőt írjuk:
=B1 + B2 + B3 + B4
D1... D4 kijelölésével ezt D1200-ig lemásoljuk.
Majd hisztorgamot készítünk ezekről is a kettővel ezelőtti pontban leírt módon annyi különbséggel, hogy most a 4 nyers adat összeadogatása során lehetséges értékekre is megszámolom, melyikből hány darab van, majd oszlopdiagramon ábrázolom ezeket az adatokat. (G34-be a következő került: =DARABHATÖBB(D1:D1200;4)).

4. ábra: A négyesével összeadogatott nyers adatok hisztogramja – megmutatja, melyik elvileg lehetséges összegből hány darab van

III. Adatelemzés

6., 7. A kapott súlyfüggvények elemzése az esélyek latolgatásával

A számítógép által generált 1200 véletlenszerű számból a fent leírt HA függvény segítségével megkapható 1200 diszkrét egyenletes eloszlású szám.

a.) Az 1200 véletlenszerű számból azonos eséllyel kerülnek a számok a $\left[0;\frac{1}{3}\right];\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right];\left[\frac{2}{3};1\right]$ intervallumba, így egyenletes eloszlást fognak mutatni, tehát a hisztogramnak elvileg három, azonos magasságú oszlopot kellene tartalmaznia (400-400 darabot minden egyes számból), amely az „egyenletes" című munkalapon található az Excel-fájlomban.

5. ábra: A diszkrét egyenletes eloszlású számok elméleti darabszáma

Comment [NaSa5]: Itt semmi bajom a szűk ablakkal, mert a különbségekre akarod felhívni a figyelmet. Így még inkább áll az, amit a 2. ábrához írtam.

6. ábra: A diszkrét egyenletes eloszlású számok elméleti darabszámának és a valós darabszámának összehasonlítása b.) Ezeket a számokat párosával összeadogatjuk, modellezzük ezt a következőképpen: van egy háromoldalú dobókockánk, oldalain rendre 1, 2, 3 pöttyel. Két ilyen dobókockát feldobunk és vizsgáljuk, hogy mekkora eséllyel lesz a kapott összeg 2, 3, 4, 5, illetve 6.

Comment [NaSa6]: ?

i. A 2-es összeg esélye:

Mindkét kockával 1-est dobunk, így lehet az összeg 2; ennek valószínűsége nyilván $P(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

ii. A 3-as összeg esélye:

Úgy jöhet össze, hogy az egyik kockával 1-est, a másikkal 2-est dobunk. Annak a valószínűsége, hogy egy kockával 1-est dobunk: $\frac{1}{3}$, hogy 2-est: $\frac{1}{3}$, tehát az egyszerre bekövetkezés valószínűsége két feldobott kocka esetén $\frac{1}{9}$, de a kockák megkülönböztethetőek, így kettővel még meg kell szoroznunk: $P(3)=\frac{2}{9}$

iii. A 4-es összeg esélye:

4-et úgy kaphatunk, ha mindkét kockával 2-est dobunk, ennek esélye $\frac{1}{9}$, vagy 1-gyel 1-est, a másikkal 3-ast dobunk, ennek valószínűsége $2\cdot\frac{1}{9}$ (itt megkülönböztetjük a kockákat): tehát a 4-es összeg esélye: $P(4)=3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

iv. Az 5-ös összeg esélye:

5-öt úgy kaphatunk, hogy az egyik dobókockával 2-est, másikkal hármast dobunk. Annak a valószínűsége, hogy egy kockával 2-est dobunk: $\frac{1}{3}$, hogy 3-ast: $\frac{1}{3}$, tehát az egyszerre bekövetkezés valószínűsége két feldobott kocka esetén $\frac{1}{9}$, de a kockák megkülönböztethetőek, így kettővel még meg kell szoroznunk: $P(5)=\frac{2}{9}$

v. A 6-os összeg esélye:

Mindkét dobókockával 3-ast kell dobnunk ehhez, tehát a valószínűség: $P(6)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

Tehát a 4. pontban nyert hisztogramok által reprezentált súlyfüggvénynek az EXCEL munkafüzetem „4-es súlyfüggvény” munkalapján látható módon kellene kinéznie. (Az egyes valószínűségekkel megszoroztam az összes darabszámot, 600-at, így megkaptam, hogy elméletileg hány darab van az egyes összegekből, és ezt ábrázoltam oszlopdiagramon.) Látható, hogy az általunk kapott súlyfüggvény hasonló, az egyes összegek esélye is közelít az előbbi valószínűségekhez:

Comment [NaSa7]: Minthogy a jelentésedet társszerző nélkül írtad, nyilván magad végezted a számításokat is. Ezért nekem jobban tetszik a bekezdés eleje, ahol egyes szám első személyben fogalmazol, nem pedig a homályos értelmű többes számban. Védéseken gyakran rákérdeznek az ilyesmire, és sokszor kiderül, hogy a szerénynek és ártatlannak tűnő „mi” mögött valójában egy sunyin leplezett „ő” vagy „ők” rejtőzködik.

$$2:\ P(2)=\frac{61}{600}=0{,}10167$$

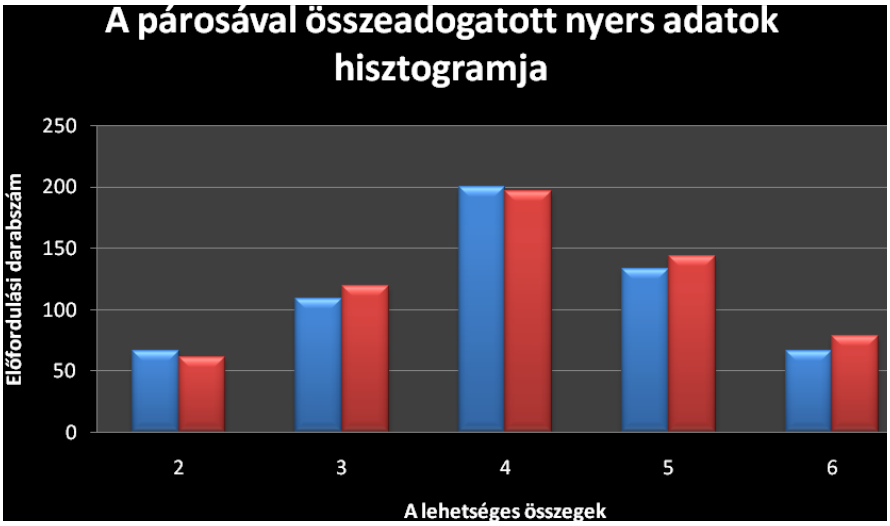
$$3:\ P(3)=\frac{119}{600}=0{,}198$$

$$4:\ P(4)=\frac{197}{600}=0{,}328$$

$$5:\ P(5)=\frac{144}{600}=0{,}24$$

$$6:\ P(6)=\frac{79}{600}=0{,}13167$$

7. ábra: A párosával összeadogatott nyers adatok hisztogramjának elméleti formája



8. ábra: A párosával összeadogatott nyers adatok hisztogramjának elméleti és valós formájának összehasonlítása

c.) A diszkrét egyenletes eloszlású számokat négyesével összeadjuk. Ezt a következőképpen modellezzük: háromoldalú dobókockával (1, 2, 3 pötty) 4-et feldobunk egyszerre, és vizsgáljuk, mekkora valószínűséggel lesz az összeg 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, illetve 12.

i. a 4-es összeg esélye:

Úgy lehet az összeg 4-es hogy mind a 4 kockával 1-es dobtunk, ennek valószínűsége: $P(4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

ii. az 5-ös összes esélye:

Úgy lehet az összeg 5, hogy 3 dobókockával 1-est, 1-gyel pedig 2-est dobunk. Ennek valószínűsége: $P(5)=\frac{kedvező}{összes}=\frac{P_4^{3,ism}}{V_3^{4,ism}}=\frac{\frac{4!}{3!}}{3^4}=\frac{4}{81}$

iii. a 6-os összeg esélye:

Úgy kaphatunk 6-ot összegként, hogy 3 dobókockával 1-est dobunk, 1-gyel pedig 3-ast; vagy 2 dobókockával 2-est dobunk, 2-vel pedig 2-est. Természetesen a pöttyök bármelyik kockán lehetnek 1-es, ill. 2-es, így:

$$P(6)=\frac{P_4^{3,ism}}{V_3^{4,ism}}+\frac{P_4^{2,2,ism}}{V_3^{4,ism}}=\frac{\frac{4!}{3!}}{3^4}+\frac{\frac{4!}{2!2!}}{3^4}=\frac{10}{81}$$

iv. a 7-es összeg esélye:

Comment [NaSa8]: Az EquationEditor minden betűt változónak vél, ezért megdönti. Az „ism” viszont csak rövidítés, nem változó szimbóluma, ezért illik a stílusát állóra igazítani. Ez áll az előző egyenlet „kedvező” és „összes” szövegére is.

7-es az összeg, ha 1 dobókockával 3-ast, 1-gyel 2-est, 2-vel pedig 1-est dobunk, vagy 3-mal 2-est, 1-gyel 1-est:

$$P(7)=\frac{P_4^{2,ism}}{V_3^{4,ism}}+\frac{P_4^{3,ism}}{V_3^{4,ism}}=\frac{\frac{4!}{2!}}{3^4}+\frac{\frac{4!}{3!}}{3^4}=\frac{16}{81}$$

v. a 8-as összeg esélye:

8-as összeget kapunk, ha 1 dobókockával 3-ast, 2-vel 2-est, 1-gyel pedig 1-est dobunk; vagy két dobókockával 3-ast, kettővel 1-est dobunk; vagy 4 dobókockával 2-est dobunk:

$$P(8)=\frac{P_4^{2,ism}}{V_3^{4,ism}}+\frac{P_4^{2,2,ism}}{V_3^{4,ism}}+P(\text{mind 2-es})=\frac{\frac{4!}{2!}}{3^4}+\frac{\frac{4!}{2!2!}}{3^4}+\frac{1}{3^4}=\frac{19}{81}$$

vi. a 9-es összeg esélye

9 az összeg 3 dobókockával 2-es, 1-gyel 3-as dobás esetén, vagy 2 dobókockával 3-as, 1-gyel 2-es, 1-gyel 1-es dobás esetén:

$$P(9)=\frac{P_4^{2,ism}}{V_3^{4,ism}}+\frac{P_4^{3,ism}}{V_3^{4,ism}}=\frac{\frac{4!}{2!}}{3^4}+\frac{\frac{4!}{3!}}{3^4}=\frac{16}{81}$$

vii. a 10-es összeg esélye:

Úgy kaphatunk 10-et összegként, hogy 3 dobókockával 3-est dobunk, 1-gyel pedig 1-est; vagy 2 dobókockával 3-ast dobunk, 2-vel pedig 2-est.

$$P(10)=\frac{P_4^{3,ism}}{V_3^{4,ism}}+\frac{P_4^{2,2,ism}}{V_3^{4,ism}}=\frac{\frac{4!}{3!}}{3^4}+\frac{\frac{4!}{2!2!}}{3^4}=\frac{10}{81}$$

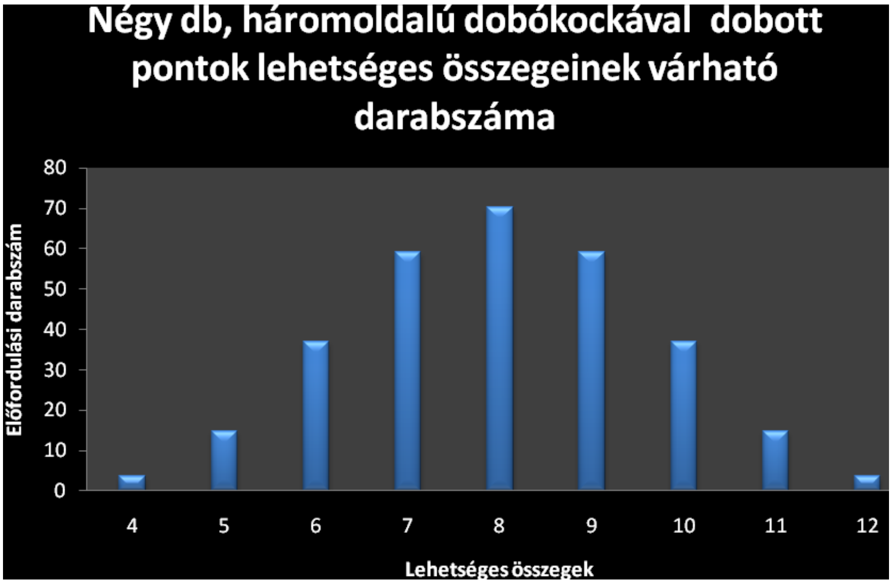
viii. a 11-es összes esélye:

Úgy lehet az összeg 11, hogy 3 dobókockával 3-est, 1-gyel pedig 2-est dobunk. Ennek valószínűsége: $P(11)=\frac{P_4^{3,ism}}{V_3^{4,ism}}=\frac{\frac{4!}{3!}}{3^4}=\frac{4}{81}$

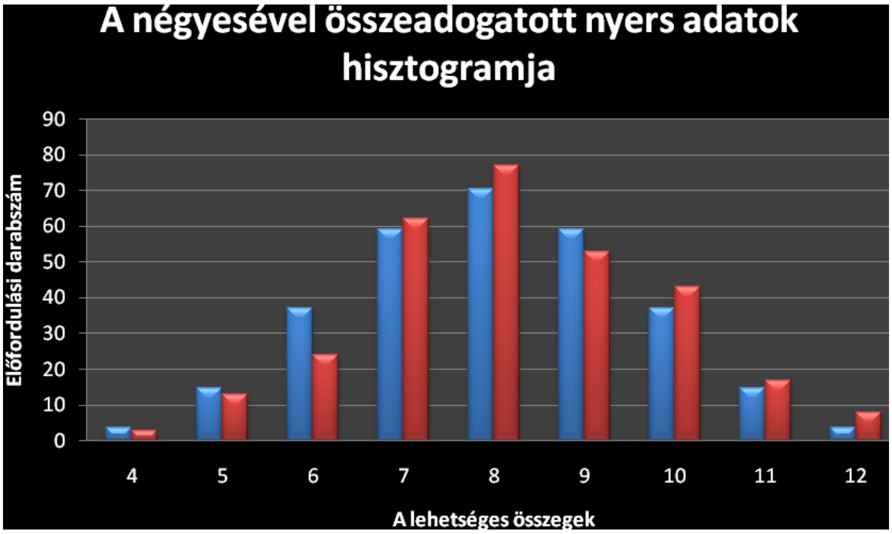
ix. A 12-es összeg esélye:

x. Akkor lesz az összeg 12, ha mind a 4 dobókockával 3-ast dobtunk, ennek valószínűsége nyilván: $P(12)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

Tehát az 5. pontban nyert hisztogramok által reprezentált súlyfüggvénynek az EXCEL munkafüzetem „5-ös súlyfüggvény” munkalapján látható módon kellene kinéznie (Kiszámoltam a kapott valószínűségek alapján, hogy az egyes összegekből elméletileg mennyi van.). Látható, hogy az általunk kapott súlyfüggvény hasonló, az egyes összegek esélye is közelít az előbbi valószínűségekhez.



9. ábra: A négyesével összeadogatott nyers adatok hisztogramjának elméleti formája



10. ábra: A négyesével összeadogatott nyers adatok hisztogramjának elméleti és valós formájának összehasonlítása

Tehát összességében elmondható, és a második, illetve harmadik hisztogram alapján látható, hogy amennyiben diszkrét egyenletes eloszlású számokat adunk össze, a súlyfüggvény Gauss-görbe-szerű lesz; ahogy azt az előző pontban a valószínűségekkel is alátámasztottuk. Továbbá az is látható a második és harmadik hisztogram alapján, hogy minél több diszkrét egyenletes eloszlású változót adunk össze, annál kisebb mértékben tér el a Gauss-görbétől a kapott súlyfüggvény.

Comment [NaSa9]: Kár, hogy ezt a következtetést nem hoztad összefüggésbe a centrális határeloszlás-tétellel.
És még egy: Ez a rövid kis szakasz elég fontos következtetést tartalmaz ahhoz, hogy egy külön kis címet megérdemeljen, hogy a Főnök, aki szokása szerint legelőször a Következtetés/Konklúzió/ Összefoglaló címszót keresi a jelentés végén, nyomban rábukkanjon.

Forrásaim:

1. Lukács Ottó – Matematikai statisztika
2. Solt György – Valószínűségszámítás

Comment [NaSa10]: Ez a rész is hiányzott a jelentések túlnyomó többségéből, pedig a Főnök szereti az ilyet. Pl. jól mutat majd a prezentációjában, amit a jelentésedből csináltat majd valakivel. Mondjuk, Veled. Ha cikket írsz, akkor is követelmény a források megadása.