Bolyongások a valószínűség mezején: A határozatlanság bizonytalansága

Nagy Sándor[1]

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Magkémiai Tanszék, Budapest

Expozíció

A Magkémia, ill. a Nukleáris tudomány alapjai c. tárgyak (kvantumkémiából szórványos, matematikából rendszerezettebb ismeretekkel rendelkező) előadójaként évek óta nyugtalanított egy probléma, melyhez a következő „bevett” úton jutunk el a legrövidebben.

Kiindulásként tekintsük a **Heisenberg-féle határozatlansági reláció** alábbi alakját:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

melyben Δx a hely, Δp pedig az impulzus bizonytalansága és $\hbar$ az ún. redukált Planck-állandó: $\hbar = h/(2\pi)$. Megfelelő forrásból [1] megtudhatjuk, hogy „**bizonytalanság**” alatt matematikai szempontból a **szórás** értendő.

Ha a fenti formulát egyszerű „dimenzióanalízisnek” vetjük alá, rögtön észrevesszük, hogy a bal oldalon szereplő SI egységek szorzata némi „algebrázás” után máshogy is felírható:

$$[\Delta x]\cdot[\Delta p] = (\mathrm{m})\cdot\left(\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = (\mathrm{s})\cdot\left(\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{m}\right) = \mathrm{s}\cdot\mathrm{J} = [\Delta t]\cdot[\Delta E]. \tag{2}$$

Ezáltal egy újabb, „jól eladható termékhez” jutunk, melyre az **idő–energia határozatlansági reláció** néven szokás hivatkozni:

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3}$$

A fenti reláció egyik változatát az alábbi alakban idézik (nem feltétlenül ezzel a jelöléssel):

$$\tau \cdot \gamma = \frac{\hbar}{2}, \tag{4}$$

ahol τ lehet, pl. egy gerjesztett állapot közepes élettartama, γ pedig fele a Γ természetes vonalszélességnek, mely a gerjesztett állapot „**energiabizonytalanság**”-át fejezi ki.

Mielőtt a probléma velejére térnék, hadd bocsássam előre, hogy matematikailag τ az **exponenciális eloszlás** (l. később) várható értékét és egyúttal **szórását** megadó paraméter, míg γ a **Cauchy-eloszlás** haranggörbe alakú sűrűségfüggvényének (Lorentz-görbe, Breit–Wigner-görbe) szélességét jellemzi. Továbbá hadd jegyezzem meg azt a sajnálatos, ám valós tényt, miszerint a Cauchy-eloszlásnak **nem létezik szórása** (sőt, még **várható értéke sincs** szegénynek). Ez pedig – az (1) egyenlőtlenség után tett megjegyzésre visszautalva – igencsak **elbizonytalanítja az embert az idő–energia határozatlansági relációban szereplő „energiabizonytalanság” valószínűség-számítási értelmezését illetően**.

[1] www.chem.elte.hu/departments/magkem/nagys/

Amikor ezt a problémát – a megfelelő rávezető szöveg kíséretében, tehát mintegy **paradoxonként** – nálam kompetensebbnek vélt fizikus, ill. vegyész kollégák elé tártam, a reagálások skáláját kb. a következő (nem egész pontosan idézett és esetenként önkényesen értelmezett) válaszok jellemezték:

#1. *Ez az egész csak mondvacsinált probléma!*
Értsd: Amit mondasz, az tulajdonképpen zavarna, ha valaki mástól, a témában kompetens személytől hallanám, de így, szerencsére, nem kell odafigyelnem arra, amit magyarázol.

#2. *Mi az hogy nincs neki várható értéke?! Muszáj annak lenni!*
Értsd: Fizikai világképembe nem illik bele, amit mondasz. Márpedig a világképem helyes, mert tíz vezető fizikus közül kilenc ezt használja. A matematikának pedig kutya kötelessége kiszolgálnia ezt a világképet!

#3. *Tényleg nincs várható értéke? Ez érdekes. Hogy is van ez?*
Értsd: Már évtizedek óta fizikában utazom, sőt talán az akadémiai tagságom ügye sem teljesen reménytelen, de őszintén szólva, még sohasem gondolkodtam el ezen a dolgon. Ha igaz, amit állítasz, akkor nagyon érdekes a kérdés. Mindenesetre meghallgatlak.

#4. *Hm… Úgy rémlik, a Heisenberg-reláció csak kanonikusan konjugált operátorpárokra vonatkozik... Igen, és az idő csak egy paraméter, nem rendelnek hozzá operátort…*
Értsd: Valamire rátapinthattál, de bocs, sietek, mert nyomban kilyukad a gyomrom az éhségtől. Rögtön bezár a menza és megint lemaradok az ebédről.

#5. *Sándor bátyám, te meg akarod cáfolni a kvantumelméletet?!*
Értsd: Te jó isten! Most olvastam azt az e-mailben terjesztett cikket egy kínaitól, aki a Heisenberg-relációt cáfolja. Eddig egész normálisnak hittelek, de úgy látszik, öregségedre elment az eszed! Remélem, nem csinálsz hülyét magadból!

Nos, távol álljon tőlem a szándék, hogy cáfoljak valamit, amihez nem értek. (Hülyét meg végképp nem akarok csinálni magamból.) Tisztelettel jelzem viszont, hogy időközben „megvilágosodott az elmém”, s azóta megszűnt számomra a fenti probléma paradoxonként létezni. Ezt a felismerésemet – melyre egy könyvfejezet [2] megírása közben tettem szert, s amelyet ott egy nyúlfarknyi megjegyzés (#64) formájában prezentáltam – szeretném most megosztani a „harmadik játékosunk”-hoz hasonlóan nyitott természetű Olvasóval. Ehhez azonban egy kis kitérőre lesz szükség a valószínűség-számítási, ill. statisztikai eloszlások közelítő leírása felé.

Eloszlásokról könnyen, gyorsan, fájdalommentesen

Idegen területről érkezők hajlamosak egyrészt misztifikálni, másrészt túlságosan is leegyszerűsíteni a **várható érték** és a **szórás** fogalmát. Mindkét fogalom használata ugyanabból az érthető igényből ered, mint amikor egy bonyolult függvényt a Taylor-sora első néhány tagjával közelítünk: tudjuk ugyan, hogy a dolog nem annyira egyszerű, de hátha…

Eloszlások közepe

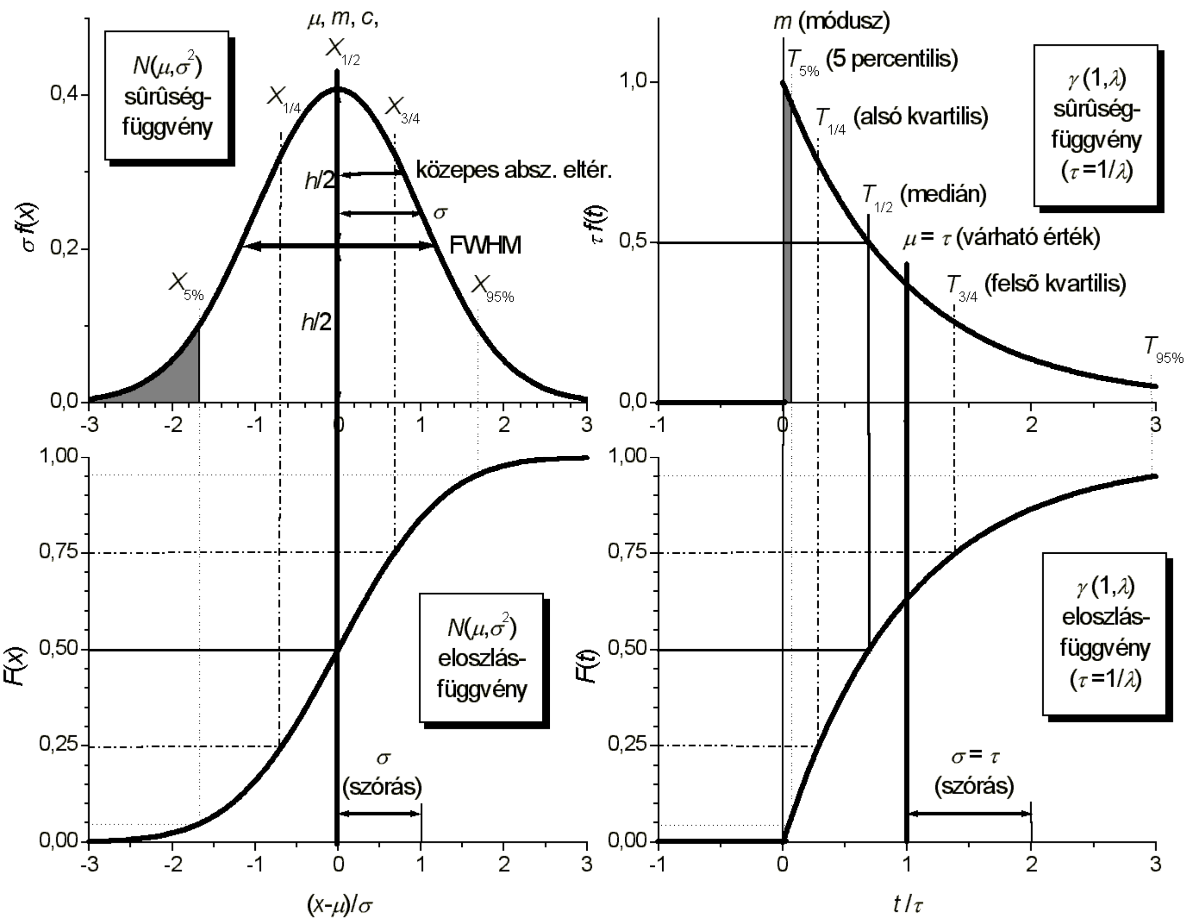
Az eloszlások közelítő leírásának[2] első legfontosabb paramétere mindig arról szól, hogy az az elmaszatolódó valami, amit pl. a sűrűségfüggvény jellemez, kb. hol is helyezkedik el abban a „térben”, amelyben vizsgálódunk. Magyarán azt a pontot keressük, amelyik – valamilyen értelemben – az eloszlás középpontjának tekinthető.

Az eloszlás középpontját sokféle megközelítés alapján definiálhatjuk.

[2] Aki szemléletes de mégis igényes bevezetőt szeretne kapni a valószínűség-számításról és az eloszlásokról, annak szíves figyelmébe ajánlom *Vetier András* remek könyvét [3].

Ha például az illető dolog, ami szétkenődött, határozott sűrűsödési tendenciát mutat egy adott ponthoz közelítve, akkor a legnagyobb sűrűséghez tartozó pontot is felfoghatjuk középpontnak. Ezt a pontot nevezik a statisztikában az eloszlás móduszának. Egydimenziós (folytonos) eloszlások esetében a **módusz** (m) egyszerűen a sűrűségfüggvény maximumhelyét jelenti az illető tengely mentén (l. az 1. ábra felső görbéit).

Egydimenziós eloszlások közepének kinevezhetjük a **mediánt** is, magyarul azt a pontot az x tengelyen, amelytől balra és jobbra ugyanannyi „matéria" (értsd: valószínűség) van szétkenve.



1. ÁBRA. Folytonos eloszlások néhány jellemző paraméterének szemléltetése a **sűrűségfüggvény** (fent) és az **eloszlásfüggvény** (lent) segítségével. Példaként egy c szimmetriacentrumú **szimmetrikus eloszlás** (balra) és egy **aszimmetrikus eloszlás** (jobbra) szerepel, melyeket az $\boldsymbol{N(\mu, \sigma^2)}$ **normális**, ill. a $\boldsymbol{\gamma(1, \lambda)}$ **exponenciális**[3] eloszlás testesít meg. A sűrűségfüggvény alatti árnyékolt terület mindkét eloszlás esetében a teljes görbe alatti terület 5%-át teszi ki a **percentilis** jelentésének, ill. a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény közötti kapcsolatnak megfelelően (ti. az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja).

Ha történetesen az egydimenziós eloszlás tengelyfelirata úgy szólna, hogy „^{14}C atomok élettartama" – pl. szerepelhetne ez a szöveg az 1. ábra jobb oldalán bemutatott $\gamma(1, \lambda)$ **exponenciális eloszlás** esetében –, akkor a medián $T_{1/2}$ = 5717 éves értékére mint a **radiokarbon felezési idejére** hivatkozhatnánk. Ez az adott esetben azt jelentené, hogy egy most kiszemelt ^{14}C atom éppen akkora eséllyel fog elbomlani a következő 5717 éven belül, mint az 5717 éves több mint matuzsálemi életkort megérni. (Ezt a tényt kihasználva, ráérős

[3] Az eloszlások megadására a következő rövidített írásmódot használom: Az $N(\mu, \sigma^2)$, a $C(m, \gamma)$ és a $\gamma(1, \lambda)$ rövidítés rendre a **normális**, a **Cauchy-** és az **exponenciális eloszlás** „családjait" jelenti, zárójelbe téve azokat a paramétereket, amelyek konkrét értéke egyértelműen meghatároz egy-egy családtagot.

halhatatlanok akár igazságos „fej vagy írás”-t is játszhatnának egy-egy ^{14}C atom sorsának 5717 éves megfigyelésével. Hiába no, ezzel is jobban telik az idő az Olümposzon!)

Szándékosan hagytam a végére a **várható értéket** (μ), amely – *ha létezik* – az eloszlás közepének egyfajta standard matematikai jellemzője. A várható értékkel kapcsolatos naiv elvárások (l. „második játékosunk” reagálását) abból fakadnak, hogy a nem-matematikusok csak afféle szőrözős matematikusi allűrnek tekintik a „ha létezik” típusú kikötéseket, s agyuk fordítóprogramja eleve figyelmen kívül hagyja az egzisztencia megkérdőjelezhetőségével foglalkozó kitételeket – mintegy programozói kommentárként kezelve azokat.

Egydimenziós **folytonos eloszlások** esetén pl. az X valószínűségi változó várható értékét az f **sűrűségfüggvény** segítségével a következő formulával számíthatjuk ki:

$$\mu = E(X) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (5)$$

Akinek a fenti formula nem sokat mond, íme helyette egy **szemléletes fizikai analógia**:

Az egydimenziós esetnél maradva, tegyük fel, hogy az x tengelyen szétkentünk, teszem azt, 1 g (vagy 1 mg vagy 1×10^{-100} g) korlátlanul kenhető festéket[4]. (Ilyen festéket tonnaszámra találunk a fizikusok gondolatkísérleti eszköztárában.) A kérdés: hol kell alátámasztani az önmagában súlytalan, ám végtelenül merev x tengelyt ahhoz, hogy a festék se jobbra, se balra ne billentse le azt.

A **várható érték** kiszámítása tehát lényegében a **súlypont** megkeresésével analóg. Aki csak kicsit is járatos a fizikában, annak erről a „libikókáról” nyilván a **forgatónyomtaték** jut az eszébe. És csakugyan: a forgatónyomaték-számítás matematikailag teljesen analóg módon megy a várható érték (5) egyenlet szerinti kiszámításával.

És most jön **az egzisztencia kérdése**.

A **várható érték létezése** fizikailag a következő követelménnyel egyenértékű: Tegyük fel, hogy megvan az a pont, amit bármely oknál fogva (pl. az eloszlás szimmetrikus voltára hivatkozva) a várható értéknek (azaz a súlypontnak) gondolnánk[5]. Vágjuk el most a befestett x tengelyt ebben a pontban, s markolja meg *Toldi Miklós* a két félegyenest egy-egy kezével. Ha meg tudja tartani mindkettőt vízszintesen (azaz mindkettőnek **véges a forgatónyomatéka**), akkor létezik a várható érték, ha pedig képtelen rá (bármilyen kicsi is a szétkent festék össztömege), akkor nem létezik.

Ha most a 2. ábra bal oldali rajzán összevetjük az $N(\mu, \sigma^2)$ **normális eloszlás**[6] közismert sűrűségfüggvényét

[4] Az $f(x)$ **sűrűségfüggvény** azt írja le pontról pontra, hogy **milyen sűrűre sikerült a festés** (g/cm, mg/km stb. egységben). Az, hogy a tömeget mindig 1-nek adtam meg valamilyen egységben, arra kíván emlékeztetni, hogy (1-re) normált, ill. (tetszés szerint) normálható eloszlásokról van szó. A normálhatóság fogalma ugyanis úgy fordítható le az adott példára, hogy véges tömegű festéket kenünk szét az x tengelyen (amely ettől még végestelen végig festékes lehet). Ilyenkor ugyanazt az összhatást – hogy ti. egyik pont „hányszor” olyan festékes, mint a másik – több vagy kevesebb össztömegű festékkel is eléretnénk. Ha történetesen egységnyi tömeget kenünk szét az adott szisztéma szerint, akkor azt mondjuk, hogy a kapott (festék)eloszlás 1-re normált.

[5] Kicsit jobban belegondolva, a várható értéket megjelenítő súlypont az a pont az x tengelyen, amelyre az összes festéket rákenhettük volna anélkül, hogy a „libikóka” eredő forgató nyomatéka bármiben is különbözném az eredeti módon lefestettétől, akárhogy változtatgatjuk is az alátámasztási pontot. Nos, lényegében ennyit „tud” a várható érték is – nem többet!

[6] Az $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlásnak *létezik várható értéke* (μ), mely megegyezik az eloszlás módusával és a mediánjával, továbbá a szimmetria folytán a sűrűségfüggvény szimmetriacentrumával.

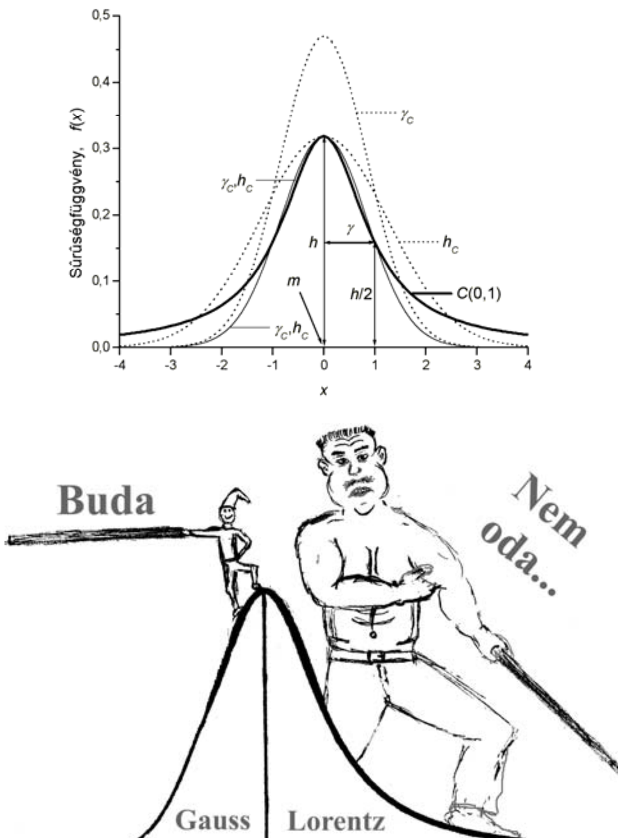
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] \tag{6}$$

az Olvasó által vélhetőleg kevésbé ismert $C(m, \gamma)$ **Cauchy-eloszlás**[7] sűrűségfüggvényével

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-m}{\gamma} \right)^2}, \tag{7}$$

akkor eléggé nyilvánvalóvá válik, hogy az utóbbival kapcsolatos problémát (ti. a várható érték hiányát) az okozza, hogy a Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye jobban szétkenődik – más szóval kevésbé koncentrálódik – az x tengely mentén, mint a normális eloszlásé. Ezt a gyanúnkat megerősíti a megfelelő eloszlású véletlen számokat összehasonlító 3. ábra is.

Ez a gondolat átvezet minket az eloszlások jellemzésére használt második fontos paramétercsoport témakörébe.



2. ÁBRA. **Balra:** A $C(0, 1)$ **Cauchy-eloszlás** sűrűségfüggvénye (vastag vonal) három különböző Gauss-görbével összehasonlítva. A szaggatott vonallal jelölt görbék 1-re normált területű normális sűrűségfüggvények. Egyiknek a magasságát (h_C), másiknak a félértékszélességét (γ_C) vettem azonosra a Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvényével. A vékony folytonos vonal olyan 0,678-ra normált területű Gauss-görbét mutat, melynek mind a magassága, mind a félértékszélessége megegyezik a Lorentz-görbéével (γ_C,h_C). Ezen a görbén a legszembeszökőbb a két eloszlás különbsége: a **Lorentz-görbe** sokkal lassabban tart a 0-hoz, mint a **Gauss-görbe**, ami megmagyarázza a várható érték és a szórás hiányát a Cauchy-eloszlás esetében.

[7] A $C(m, \gamma)$ Cauchy-eloszlásnak *nincs várható értéke*, ugyanakkor a módusza (m) és a mediánja létezik és egybeesik a szimmetriacentrummal.

Jobbra: A szövegben leírt szemléletes analógiát követve a várható értékkel kapcsolatos különbség fizikailag a következő állítással egyenértékű: Ha egy „tökéletesen merev” fóliára „felrajzolnánk” a Gauss-görbe, ill. a Lorentz-görbe egyik félsíkba eső felét, majd körbevágnánk a görbe és az x tengely közé eső részt, melynek össztömegét teszőlegesen kicsiny pozitív értékre, pl. 0,5 mg-ra választhatnánk (ez megtehető volna a normálhatóság miatt), majd megkérnénk *Toldi Miklóst*, hogy markolja meg a kivágott rész szélesebb végét, s emelje meg ezt a pillénél is könnyebb „petrencerudat”, akkor a Lorentz-görbe esetében képtelen lenne eleget tenni a kihívásnak, bármilyen nagy (de véges) rész férne is el széles tenyerében az eloszlás fél milligrammjából. Ezzel szemben a Gauss-görbével még *Hüvelyk Matyi* is könnyedén elboldogulna. (*Szilágy-Nagy Zsuzsa* rajza)

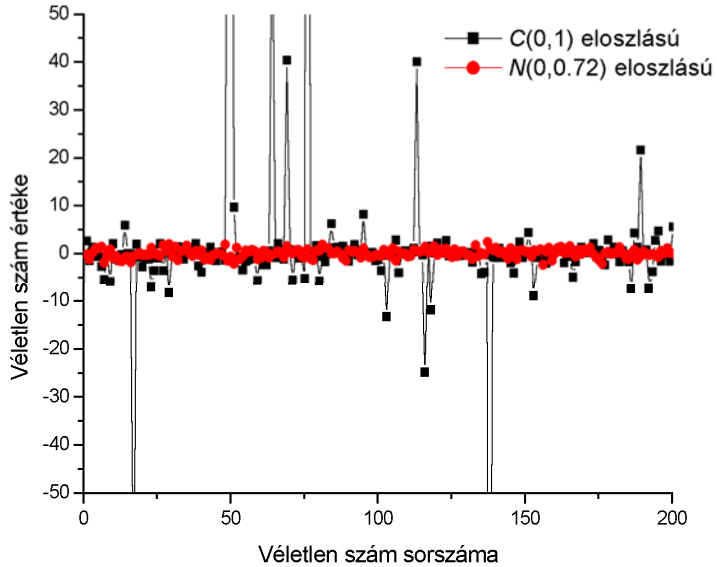
Eloszlások szóródása

Az **eloszlások szóródását** – szemléletesen mondva: az eloszlások szétkenődését – az eloszlás centruma körül szintén többféle módon lehet jellemezni.

Az **interkvartilis távolság** (és rokonsági köre, a **percentilisek közötti távolság**) igen általánosan használható jellemzője az egydimenziós eloszlások szóródásának. Ez egy 50%-os valószínűségű intervallumot jelöl ki az x tengelyen, mely alatt és fölött 25-25%-a, azaz egy-egy negyede van az eloszlásnak (innen a negyedre utaló kvartilis elnevezés). Az interkvartilis távolság mindannyiszor használható, amikor a medián, hiszen mindkettő csak az eloszlás normálhatóságán múlik, amit alapértelmezésnek veszünk. Például a $C(m, \gamma)$ **Cauchy-eloszlás** interkvartilis távolsága 2 γ, az $N(\mu, \sigma^2)$ **normális eloszlásé** pedig kb.1,348 σ.

A **félértékszélesség** (**FWHM**) unimodális (egyetlen maximumú sűrűségfüggvénnyel rendelkező) folytonos eloszlások szóródását jellemző paraméter. A kifejezés a sűrűségfüggvény (csúcs) szélességét jellemzi ott, ahol a magassága fele a maximálisnak. Innen a szokásos rövidítés: *full width at half maximum*. Ennek létezéséhez is elég a normálhatóság. Például a $C(m, \gamma)$ **Cauchy-eloszlás** félértékszélessége 2 γ, az $N(\mu, \sigma^2)$ **normális eloszlásé** pedig kb. 2,355 σ. (Vegyük észre, hogy a Cauchy-eloszlás interkvartilis távolsága és félértékszélessége megegyezik egymással, míg a normális eloszlásé nem.)

A **közepes abszolút eltérés** olyan szóródási paraméter, amely mindannyiszor értelmezhető, amikor a várható érték létezik. Ez ugyanis a várható értéktől mért távolság várható értékét jelenti matematikailag.



3. ÁBRA. Azonos félértékszélességű (FWHM=2) Cauchy- és normális eloszlású véletlen számok összehasonlítása. A Cauchy-féle adatok némelyike 500 körül van ebben a véletlen sorozatban, vagyis ha ezeket is ábrázolni akartam volna, akkor az adott lépték mellett jócskán lelógnának a papírról. Ezzel szemben a

normális adatok mindegyike a 3σ-nak megfelelő 0±2,5-es szűk sávba esik, ahogy illik egy ilyen kis számú minta esetében.

Az eloszlások szóródására jellemző paraméterek közül a **variancia** – más néven **szórásnégyzet** (ill. az ebből származtatott szórás) – jelenti a standardot. Ha ez létezik, akkor többnyire ezt (ill. a szórást) szokás megadni. Jelölése σ^2, ill. ha hangsúlyozni akarjuk, hogy az X valószínűségi változó varianciájáról van szó, akkor $D^2(X)$:

$$\sigma^2 \equiv D^2(X) \equiv E\left((X-\mu)^2\right) \tag{8}$$

ahol μ az X várható értéke az (5) egyenlet szerint.

A **szórás** (σ) – alias: **standard deviáció** – a variancia négyzetgyökét jelenti. Minthogy a variancia létezése a várható érték létezését feltételezi (sőt többet), a $C(m, \gamma)$ Cauchy-eloszlásnak szórása sem lehet, míg az $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlás szórása éppen σ.

A **szóródási paraméterek** viszonyát – két speciális eloszlás esetében – lásd az 1. ábrán.

A paradoxon feloldása

A (4) egyenlet klasszikus és kvantummechanikai módszerrel egyaránt levezethető. Az utóbbi megtalálható pl. *Marx Györgynél* [4]. A levezetés mondanivalója kb. az, hogy ha van egy gerjesztett állapot, melynek élettartam-eloszlása $\gamma(1, \lambda)$ exponenciális az 1. ábrán bemutatott sűrűségfüggvénnyel

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda t) = \dfrac{\exp(-t/\tau)}{\tau} & \text{ha} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad t \le 0 \end{cases}, \tag{9}$$

akkor ebből következik, hogy a gerjesztett állapotot nem egyetlen E_0 energiaérték fogja jellemezni, mint gondolnánk, hanem egy olyan $C(E_0, \gamma)$ Cauchy-eloszlás, melynek γ paramétere fordítva arányos a $\tau = 1/\lambda$ közepes élettartammal:

$$\gamma = \frac{\lambda\hbar}{2} = \frac{\hbar}{2\tau}. \tag{10}$$

Vegyük észre, hogy a fenti képlet τ-val átszorozva épp a (4) egyenletet adja.

Leszögezhetjük tehát, hogy a γ paraméter (vagyis az állapotszélességnek, szintszélességnek vagy természetes vonalszélességnek is nevezett Γ félértékszélesség fele) **nem a szórás minőségében** került a képletbe.

Ettől persze – kvalitatív értelemben – még mindig tekinthetjük a (4), ill. a (10) egyenletet az idő–energia határozatlanság kifejeződésének. Szem előtt kell azonban tartanunk azt a tényt, hogy csak az idő (vagyis az élettartam-eloszlás) „bizonytalansága” jellemezhető a standard deviációval, míg az energia (vagyis az energiaeloszlás) „bizonytalanságát” a szóródás egy másik jellemzője, a félértékszélesség fele adja meg, minthogy az energiaeloszlások eme speciális esetében a szórás egész egyszerűen nem létezik.

Fontos megjegyezni azt is, hogy az (1), ill. a (3) egyenlőtlenségből soha nem tudtunk volna következtetni a (4) egyenlet konkrét formájára, bármilyen erős lett volna is a „hitünk” az idő–energia határozatlanság érvényesülésében, hiszen **csakis önkényesen lehetett volna előcibálni a félértékszélesség felét mint kvantitatív szóródási paramétert a nem létező szórás pótlására**..

Megjegyzem, alkalmazói szinten – Mössbauer-spektroszkópusként – évtizedek óta nap mint nap szembesülök a gerjesztett magállapotok energiájának Cauchy-eloszlásával, hiszen ennek köszönhető a **Mössbauer-spektrumok** Lorentz-görbe alakja. Ugyanakkor a kérdés statisztikai hátterének megértése – mint mondtam – viszonylag nem régen tisztult le bennem. Mint ahogy meglehetősen frissek azok a szerintem **igen fontos kísérleti eredmények** is, amelyeket „elkövetőjük" – *Belgya Tamás* [5] – tárt fel előttem, s amelyek kétségbevonhatatlan és precíz bizonyítékát adják a (10) egyenlet érvényesülésének.

Amint arra utaltam, a **várható érték és a szórás hiánya** többnyire sokkolni szokta azokat, akik a **Lorentz-görbe** fizikai jelentésével régebb óta tisztában vannak, és csak később szembesülnek ezzel a matematikai „hiányossággal", mely azt sugallja, mintha az eloszlás „reménytelenül" szét volna kenve az energiatengelyen.[8] Hogy erről szó sincs, az fizikai szempontból világos: különben nem létezhetnének „éles" spektrumvonalak. A várható érték (és az erre épülő szórás) egyszerűen azért mond csődöt, mert az eloszlás „koncentrálódása" nem éri el azt a szintet, ami a megfelelő integrálformula konvergenciájához szükséges[9]. A szóródás egyéb jellemzői (módusz, kvartilis terjedelem stb.) ettől még jól használhatók.

Mindazonáltal világosan kell látni, hogy a Cauchy-eloszlás érvényessége – mint bármely végtelenségig elterpeszkedő (végtelen tartójú) eloszlásé – csakis korlátozott lehet az energia esetében, hiszen lefelé az $E \geq 0$ feltétel, felfelé pedig az $E < mc^2 < \infty$ feltétel mindenképpen határt szab neki[10]. Fizikailag tehát csakis a **Cauchy-eloszlás csonkítottja** jöhet szóba[11].

Ami a Cauchy-eloszás csonkítottját illeti, az már természetesen nem Cauchy-eloszlás. Ebből a tényből – ahogy erre L. E. Ballentine [8] rámutat – egy igen érdekes következtetésre jutunk a következő gondolatmenet szerint.

A (7) sűrűségfüggvény (mint energiafüggvény: $x = E$, $m = E_0$) Fourier-transzfomáltja a (10) egyenletben megadott γ paraméterérték mellett az alábbi exponenciális függvény:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{E - E_0}{\gamma}\right)^2} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t\right) \mathrm{d}E = \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t - \mathrm{i}\frac{E_0}{\hbar}t\right). \tag{11}$$

Ebből az időtől függő komplex amplitúdóból közvetlenül adódik az élettartam-eloszlás exponenciális volta, ti. a t élettartam túlélési esélye:

$$P(T > t) = |A(t)|^2 = \exp(-\lambda t). \tag{12}$$

Minthogy a Fourier-transzformáció kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít függvény és transzformáltja között, az élettartam-eloszlás csak akkor lehet szigorúan exponenciális, ha az energiaeloszlás szigorúan Cauchy-féle. Minthogy az utóbbi fizikailag lehetetlen, **az exponenciális élettartam-eloszlás is csak közelítőleg érvényesülhet**.

Végül, hadd jegyezzem meg még, hogy Ballentine [8] plauzibilis és általános „elővezetését" adja az idő-energia határozatlanság alábbi alakjának

[8] A szembesülés valószínűleg gyakran el is marad. *Bevington* pl. gyakran idézett alapművében [6] úgy ír a Cauchy-eloszlásról, mint amelynek várható értéke van, csak a varianciáját nem értelmezik. A várható értéket ő is (mint sokan) valószínűleg az ún. Cauchy-féle főértékkel [7] keveri össze, mely valóban létezik és *m* az értéke.

[9] Vegyük észre, hogy a (7) sűrűségfüggvény aszimptotikusan arányos az x^{-2} kifejezéssel, és ezért az (5) várhatóérték-formula integrandusa az x^{-1} kifejezéssel arányos, tehát maga az integrál (~ln x) nem lehet korlátos.

[10] Jegyezzük meg azért, hogy nemcsak a Cauchy-eloszlással van gond az energia esetében, hanem a normális eloszlással és a gázok kinetikus elméletéből ismert **Maxwell–Boltzmann-eloszlással** is, minthogy az egyik „tartója" az egész számegyenes, a másiké a pozitív félegyenes. (A tartó az, ahol a sűrűségfüggvény nem nulla.)

[11] A csonkítás a „tartó" megkurtítását és az eloszlás újranormálását jelenti.

$$\tau_R \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{13}$$

melyben ΔE az **energia szórása**, τ_R pedig egy erre alkalmas R dinamikai változó ΔR szórásából és $\langle R \rangle$ várható értékéből számítható **karakterisztikus időtartam**:

$$\tau_R \equiv \Delta R \cdot \left\{ \frac{\mathrm{d}\langle R \rangle}{\mathrm{d}t} \right\}^{-1}, \tag{14}$$

Az időtől függő $\langle R \rangle$ várható érték láthatóan **az idő mérésére alkalmas óra** szerepét tölti be.

Hivatkozások

[1] Kapuy E., Török F.: Az atomok és molekulák kvantumelmélete, *Akadémiai Kiadó*, Budapest, 1975, 150-162. oldal

[2] Nagy S.: Statistical aspects of nuclear measurements, Ch. 7 of Vol. 1 in Handbook of Nuclear Chemistry (Eds. Vértes A., Nagy S., Klencsár Z.), *Kluwer Academic Publishers*, Amsterdam, 2003, pp. 325-390

[3] Vetier A.: Szemléletes mérték- és valószínűségelmélet, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1991

[4] Marx Gy.: Kvantumelektrodinamika, *Oktatási Jegyzetellátó Vállalat*, Budapest, 1954, 72-74. oldal

[5] Belgya T., Fazekas B., Molnár G., Gatenby R. A., Johnson E. L., Baum E. M., Wang D., Diprete D. P., Yates S. W.: Nuclear lifetimes from (n,n'γ) measurements, *Eighth Intern. Symp. on Capture Gamma-Ray Spectroscopy*., Fribourg, Switzerland (20-24 September 1993), 1993, pp. 878-887, Fig. 4.

[6] Bevington, P. R.: Data reduction and error analysis for the physical sciences, *McGraw–Hill Book Co*., New York, 1969

[7] Korn, G. A., Korn, T. M., Matematikai kézikönyv műszakiaknak, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1975, 568-569. oldal

[8] Ballentine, L. E., Quantum Mechanics, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, 1990, pp. 235-240

Köszönetnyilvánítás

Megköszönöm kollégáimnak, *Németh Zoltánnak* és *Süvegh Károlynak*, hogy észrevételeikkel segítettek világosabban kifejteni mondandómat. Köszönet jár az idézett, de meg nem nevezett „játékosoknak” is – akik természetesen mind a képzelet szülöttei –, mert megértésükkel, ill. meg-nem-értésükkel arra sarkalltak, hogy megírjam ezt a cikket. Végül köszönet illeti *Silberer Verát* is, egykori kedves kollégámat az ELTE-ről, aki a Handbook of Nuclear Chemistry c. könyvünk [2] MTA-ban tartott sajtótájékoztatóján arra biztatott, hogy írjak neki valamit a kerékpározásról. Nos, ez kerekedett ki belőle…