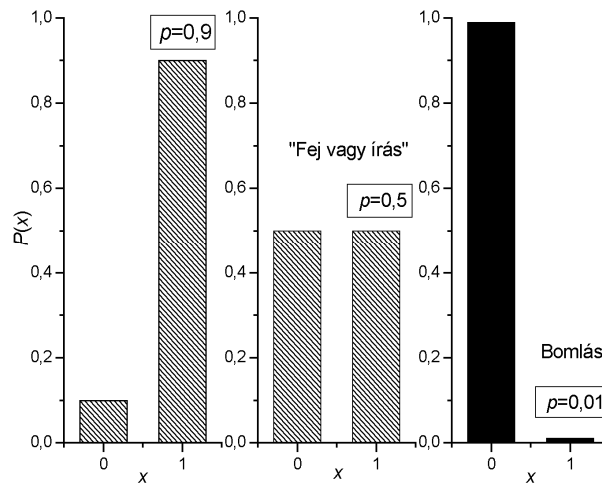


NEVEZETES ELOSZLÁSOK

1. Bernoulli-eloszlás: $B(1, p)$

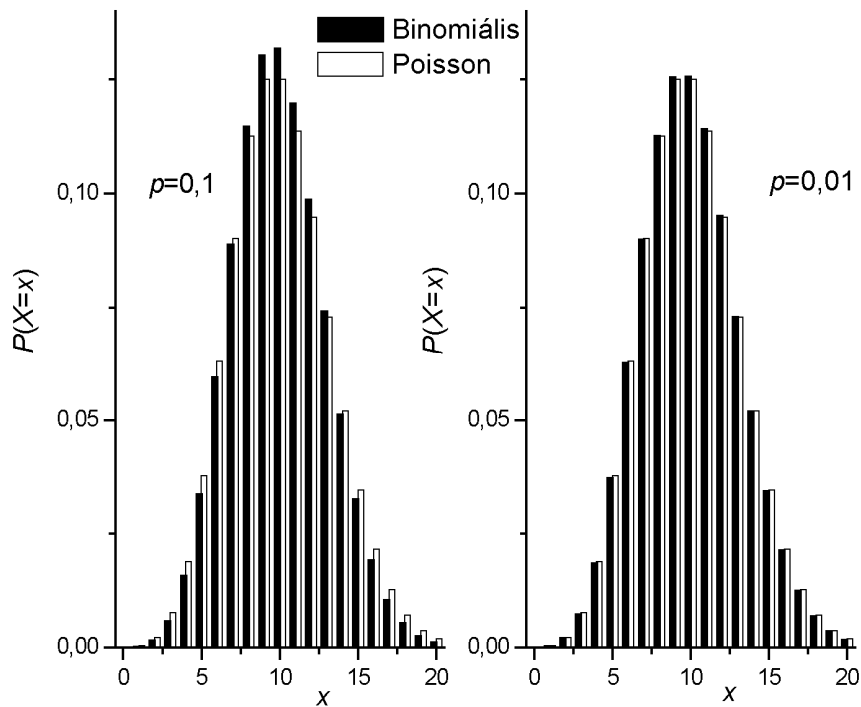
Súlyfüggvény:.....	$P(X = x; p) = \begin{cases} p & \text{ha } x = 1 \\ q & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ahol: $q=1-p$
Várható érték:.....	p	Módusz:..... $\begin{cases} 1 & \text{ha } p \geq q \\ 0 & \text{ha } p \leq q \end{cases}$
Variancia:.....	pq	Relatív szórás:..... $\sqrt{\frac{q}{p}}$



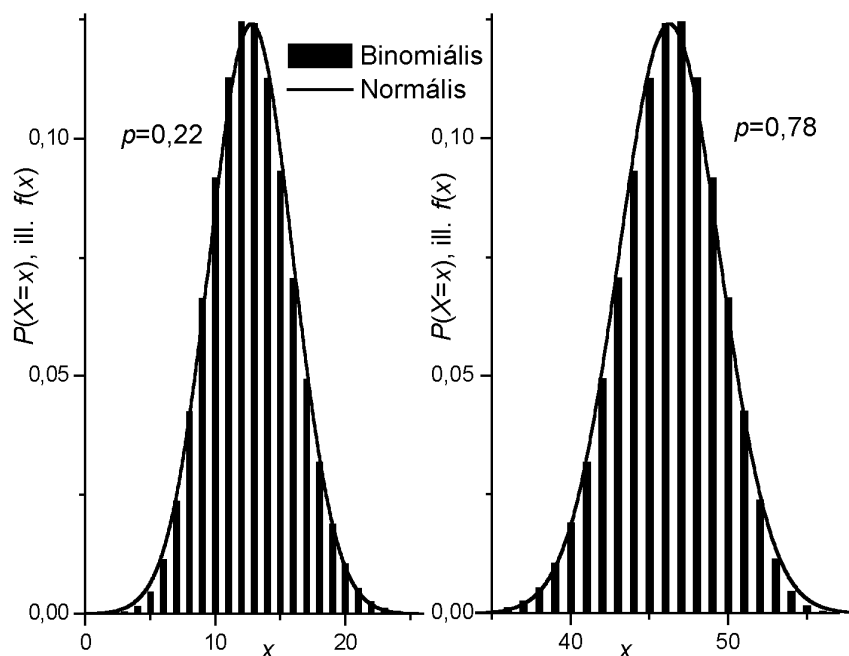
1. ÁBRA. A Bernoulli-eloszlás három alaptípusa q (kudarcc \Leftrightarrow 0) és p (siker \Leftrightarrow 1) aránya szerint osztályozva. Bármelyik típusra alapozott **Bernoulli-kísérletsorozat** binomiális eloszlást eredményez, de csak a harmadik vezet Poisson-eloszláshoz. A **radioaktív bomlásszámok mérése** rendszerint az utóbbi kategóriához tartozik.

2. Binomiális eloszlás: $B(n, p)$

Súlyfüggvény:.....	$P(X = x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$(x = 0, 1, \dots, n)$ ahol: $q=1-p$
Várható érték:.....	$np \equiv \mu$	Módusz:..... $\begin{cases} \mu - q \text{ és } \mu + p \\ \lceil \mu + p \rceil \end{cases}$ ha $\mu + p$ egész ha $\mu + p$ nem egész
Variancia:.....	$npq = \mu q$	Relatív szórás:..... $\sqrt{\frac{q}{\mu}} = \sqrt{\frac{q}{pn}}$



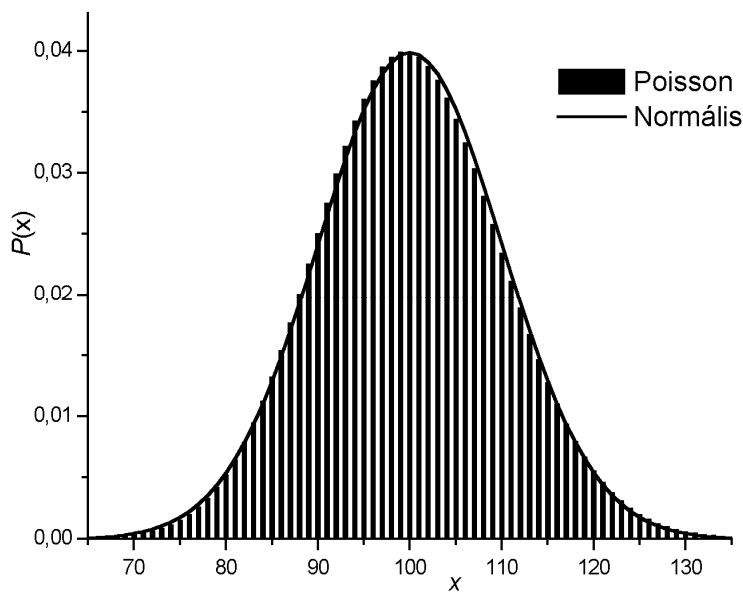
2. ÁBRA. A binomiális eloszlás egészen kis np esetén is jól közelíthető $\Gamma(np)$ Poisson-eloszlással, feltéve, hogy a „siker” valószínűsége kicsi ($p \leq 0,1$). Amint látjuk, $p=0,1$ -re a közelítés egészen tűrhető, $p=0,01$ -re pedig (1. az 1. ábrát) már szinte tökéletes. (A fenti ábrákon $np=10$.)



3. ÁBRA. A binomiális eloszlás p értékétől függetlenül jól közelíthető $N(np, npq)$ eloszlással, ha $npq \geq 6$. A bemutatott példában n mindössze 59, és npq is csak 10, a közelítés mégis egészen jó.

3. Poisson-eloszlás: $\Pi(\mu)$

Súlyfüggvény:.....	$P(X = x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$
Várható érték:..... $\boxed{\mu}$	Módusz:..... $\begin{cases} \mu-1 \text{ és } \mu \\ \lfloor \mu \rfloor \end{cases}$ ha μ egész ha μ nem egész
Variancia:..... $\boxed{\mu}$	Relatív szórás:..... $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$

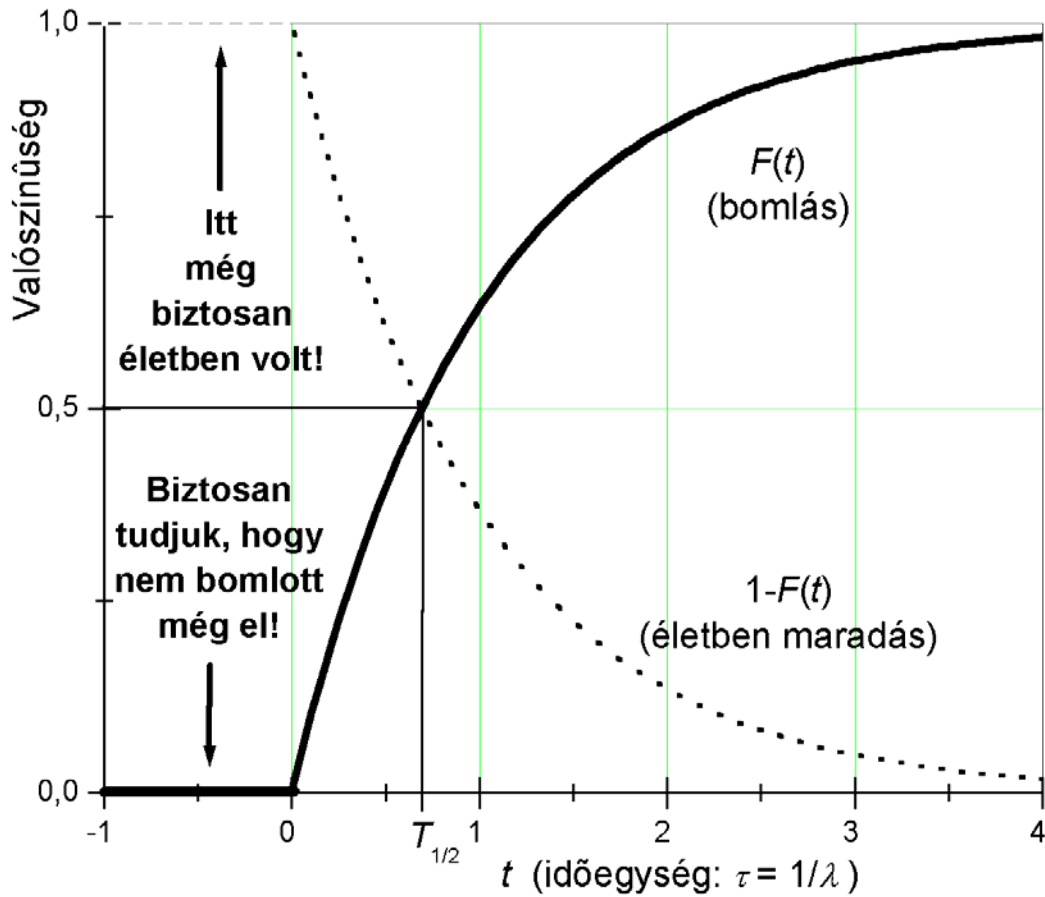


4. ÁBRA. A $\Pi(\mu)$ eloszlást $\mu=100$ esetén már szinte tökéletesen közelíti az $N(\mu, \mu)$ eloszlás.

4. Exponenciális eloszlás: $\gamma(1, \lambda)$

Kulcsszavak: örökifjúság, emlékezetnélküliség, fáradhatatlanság.

Sűrűségfüggvény:.....	$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{ha } t > 0 \\ 0 & \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$
Eloszlásfüggvény:.....	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
Várható érték:..... $\boxed{\frac{1}{\lambda} \equiv \tau}$	Medián:..... $T_{1/2} \equiv \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,7}{\lambda}$
Variancia:..... $\boxed{\frac{1}{\lambda^2} = \tau^2}$	Relatív szórás:..... $\boxed{1}$



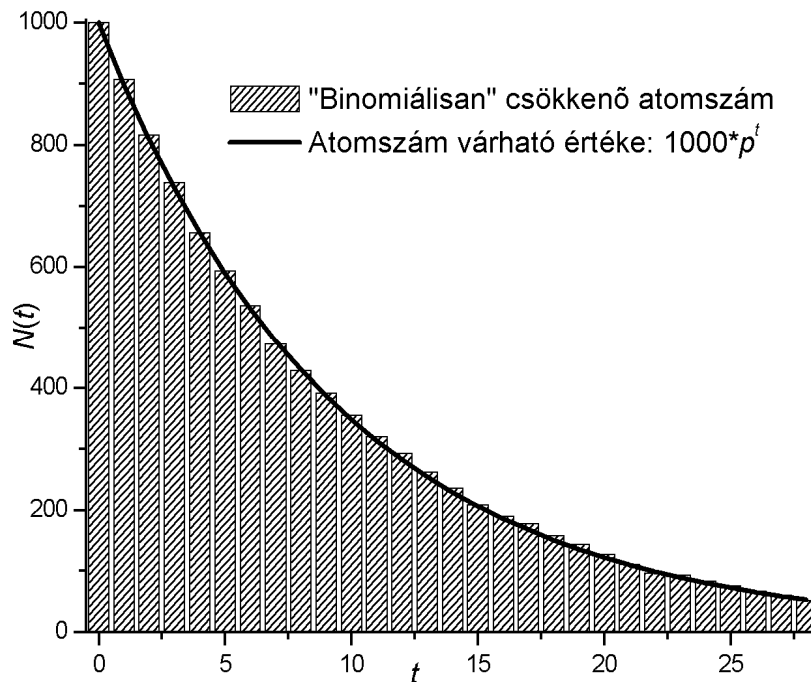
5. ÁBRA. A folytonos vonallal rajzolt $F(t)$ exponenciális **eloszlásfüggvény** a bomlás valószínűségét fejezi ki a t időpontig. A szaggatott vonallal rajzolt függvény ezzel szemben annak valószínűségét adja meg, hogy az „entitás” bomlás nélkül ússza meg a t időpontig. A **sűrűségfüggvény** $t > 0$ esetén ez utóbbi λ -szorosa. Azonban $t \leq 0$ esetén a sűrűségfüggvény nem 1 (ill. λ), hanem 0.

A Poisson-folyamat

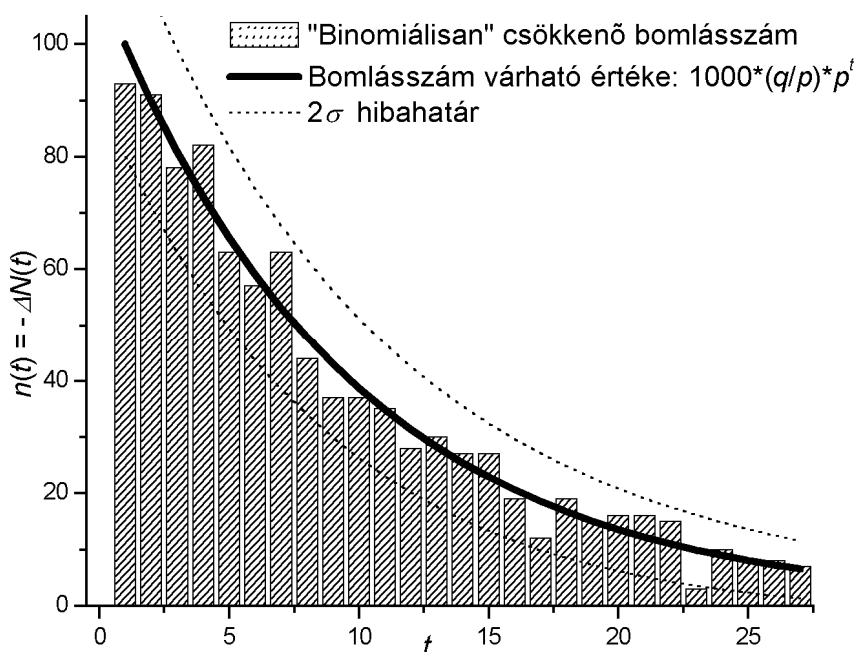
- Ha a t idő alatt észlelt eseményszám $\mathcal{P}(\mu)$ Poisson-eloszlású, akkor az egyes események követési „távolsága” $\chi(1, \mu/t)$ exponenciális eloszlású ($\nu = \mu/t$ az átlagos követési frekvencia).
- Ha az egyes események követési „távolsága” $\chi(1, \nu)$ exponenciális eloszlású, akkor a t idő alatt észlelt eseményszám $\mathcal{P}(\nu t)$ Poisson-eloszlású.

Emlékezetnélküliség, avagy a budapesti tömegközlekedő paradoxonja

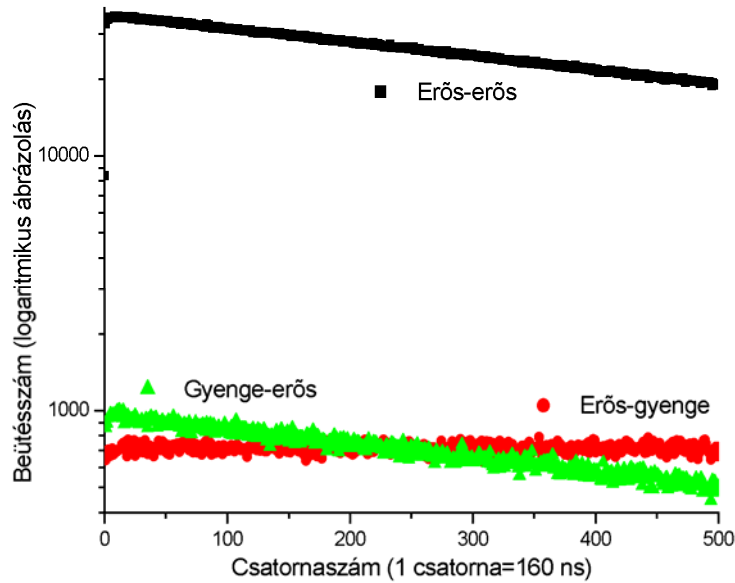
Egy 10 percnként indított villamosjárat nem tudja tartani a menetidőt. A sokadik megállóban az egy órán belüli érkezések száma Poisson-eloszlású. A követési idők átlaga azonban 10 perc marad. Az utas, aki találmra érkezik a megállóba, arra számít, hogy átlagosan 5 percet kell várakoznia a kitett menetrend szerint, mert nyilván nem lehet akkora pechje, hogy minden áldott/átkozott esetben pont előtte ment el a villamos. Igazából átlagban 10 percre számíthat.



6. ÁBRA. 1000 darab atom lehetséges sorsa szimulációval. Az életben maradás valószínűségét $p=0,9$ -nek vettük egy időegység alatt. A megfigyelt **atomok száma** monoton csökken egy véletlenszerű lépcsős függvény szerint, mely egy exponenciális görbe ívét követi.



7. ÁBRA. Az itt ábrázolt „bomlásszámokat” az előző szimulációs ábra lépcsőmagasságaiból kaptuk. Vegyük észre, hogy a „tapasztalt” **bomlásszámok** korántsem mutatnak monoton csökkenést. Mindazonáltal, ha le-föl ingadozva is, de ugyanazt az exponenciális ívet követik, mint maguk az atomszámok.



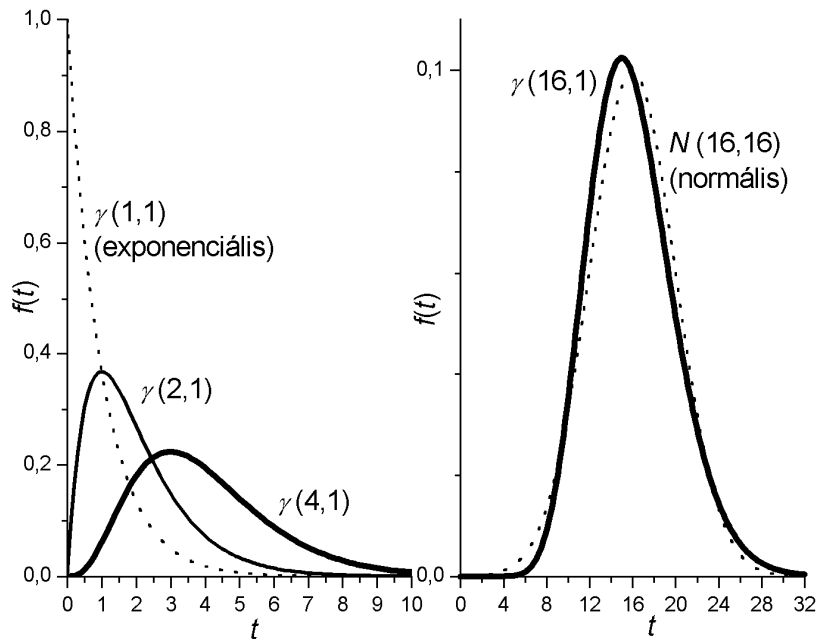
8. ÁBRA. Két független radioaktív jelforrás (^{22}Na) impulzusai közti várakozási idő eloszlása féllogaritmikus ábrázolásban. (Süvegh Károly mérése.) A feliratok (pl. erős-erős) az időmérés startjelét, ill. stopjelét szolgáltató forrás erősségét jelzik. Látszik, hogy az egyenesek meredekségét a stopjelet szolgáltató jelforrás közepes frekvenciája (azaz a forrásereőség) szabja meg, noha a startjelek véletlenszerű időpontokban érkeztek a stopjelek sorozatához képest. Ez az eredmény jól mutatja az exponenciális eloszlás **emlékezetnélküliségét**. Ezzel azonos kísérletet szoktak ajánlani a PAS mérések esetében ún. „fehér” zaj (azaz időben egyenletes eloszlású véletlen jelek) generálására. Az eredmény világosan mutatja, hogy a kapott zaj csak annyira lehet „fehér”, amennyire az exponenciális függvény egy rövid szakasza vízszintesnek tekinthető.

5. Gamma-eloszlás: $\gamma(r, \nu)$

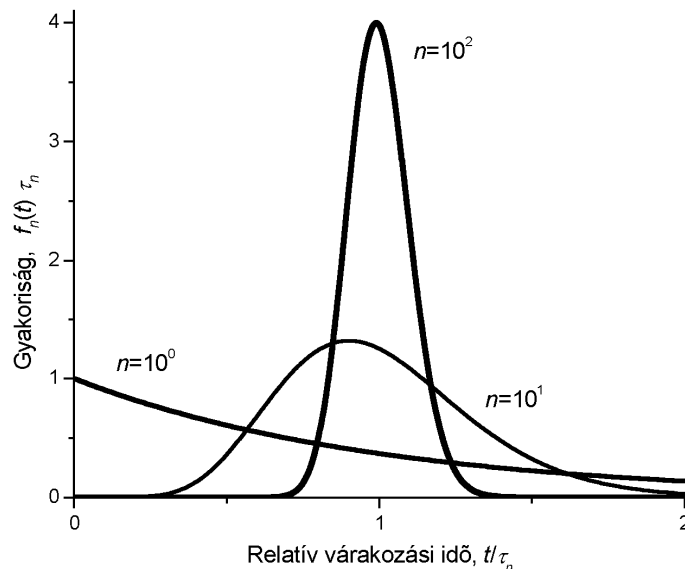
Interpretáció: Ha X_i -k független $\gamma(1, \nu)$ eloszlásúak, akkor az $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ összeg $\gamma(n, \nu)$ eloszlású.

<p>Sűrűségfüggvény¹:</p>	$f_r(t) = \begin{cases} \frac{(\nu t)^{r-1}}{\Gamma(r)} \nu e^{-\nu t} & \text{ha } t > 0 \\ 0 & \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$
<p>Teljes gamma függvény: .. $\Gamma(r) \equiv \int_0^\infty e^{-x} x^{r-1} dx$</p>	<p>Közepes jelfrekvencia: $\tau_r^{-1} = \frac{\nu}{r}$</p>
<p>Várható érték:..... $\tau_r \equiv \frac{r}{\nu}$</p>	<p>Módusz: $\frac{r-1}{\nu}$</p>
<p>Variancia:..... $\frac{r}{\nu^2}$</p>	<p>Relatív szórás: $\frac{1}{\sqrt{r}}$</p>

¹ A sűrűségfüggvényben r és ν pozitív valós szám, $\Gamma(r)$ pedig a teljes gamma-függvény.



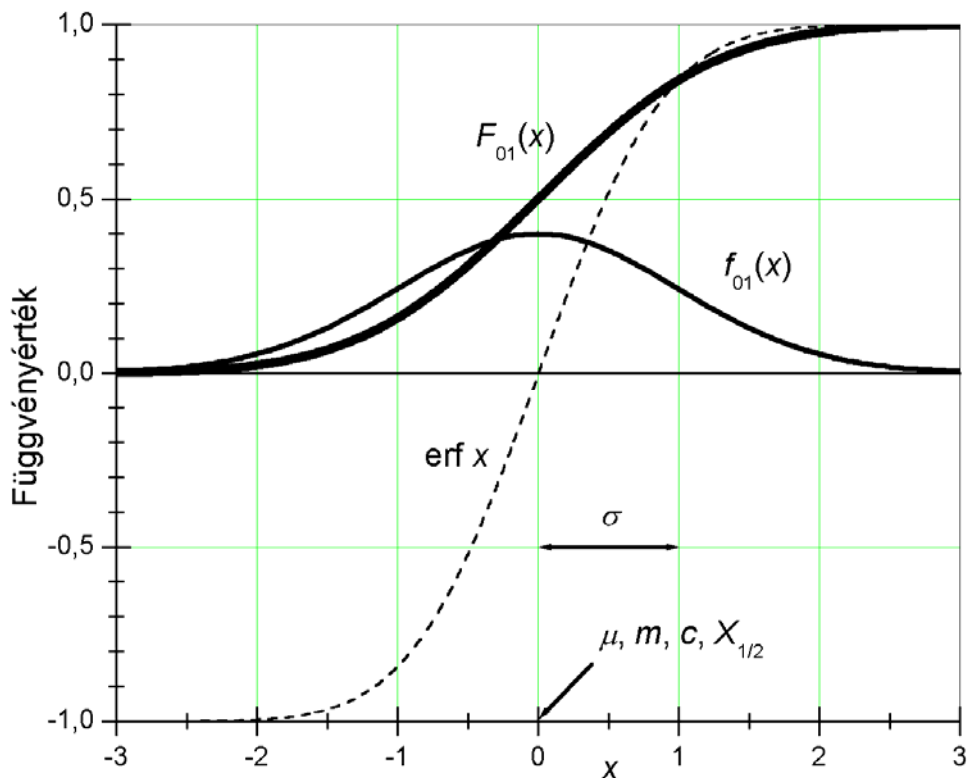
9. ÁBRA. Különböző egészrendű gamma-eloszlások sűrűségfüggvénye ugyanazzal a $\nu=1$ paraméterrel. Az $r=1$ rendhez az **exponenciális eloszlás** jellegzetes aszimmetrikus sűrűségfüggvénye tartozik, de a rend növekedésével az aszimmetria csökken, és $r=16$ -ra már tűrhető az egyezés a megfelelő várható értékű és varianciájú $N(r/\nu, r/\nu^2)$ – most: $N(16, 16)$ – **normális eloszlással**. A gamma-eloszlás a **szkélerimpulzusok** közti várakozási idő jellemző eloszlása, ahol r a leosztási szám, ν pedig a leosztatlan impulzusok közepes frekvenciája.



10. ÁBRA. Radioaktív preparátum mérése esetén – **Poisson-folyamat**ról lévén szó – a számláló tizedes számjegyei a helyiértéknek megfelelő gamma-eloszlású várakozási idő után ugranak a következő értékre. Keskenyebb eloszlás egyenletesebb váltási ritmust jelent. A sűrűségfüggvényeket úgy normáltuk, hogy mindegyik esetben azonos legyen a görbe alatti geometriai terület.

6. Normális eloszlás: $N(\mu, \sigma^2)$

Sűrűségfüggvény ² :.....	$f(x) = \frac{1}{\sigma} f_{01}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$
Eloszlásfüggvény:	$F(x) = F_{01}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$
Hibafüggvény:.....	$\operatorname{erf} x = -\operatorname{erf}(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$
Várható érték, medián, módusz, szimmetriacentrum: μ	
Variancia: σ^2	Várható absz. eltérés: $\dots \sqrt{2/\pi} \sigma \approx 0,798\sigma$
Kvartilis terjedelem: $\dots 1,348\sigma$	Az f inflexiós pontja: $\dots \mu \pm \sigma$
Félértékszélesség (FWHM: Full Width at Half of the Maximum): $\dots 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 2,355\sigma$	



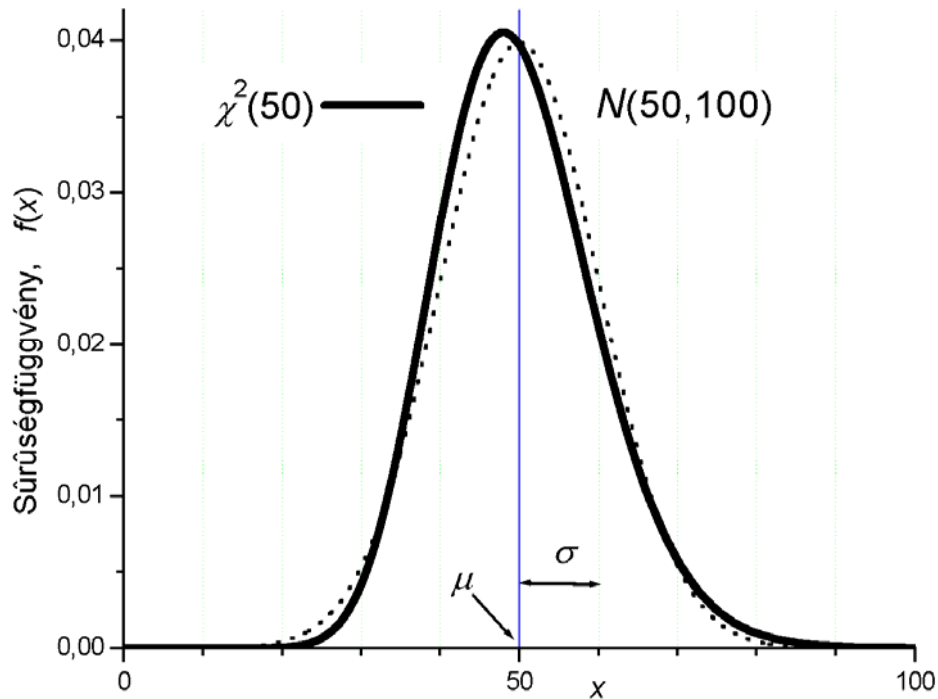
11. ÁBRA. Standard normális $N(0, 1)$ eloszlás sűrűségfüggvénye (f_{01}) és eloszlásfüggvénye (F_{01}), valamint a hibafüggvény (erf). A $\mu \pm \sigma, \mu \pm 2\sigma, \mu \pm 3\sigma$ hibaszávoknak itt a $0 \pm 1, 0 \pm 2, 0 \pm 3$ zónák felelnek meg.

² f_{01} és F_{01} az $N(0,1)$ (standard normális) eloszlás sűrűségfüggvénye, ill. eloszlásfüggvénye.

7. A χ^2 -eloszlás: $\chi^2(k)$

Interpretáció: Ha X_i -k független $N(0,1)$ eloszlásúak, akkor az $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2$ négyzetösszeg $\chi^2(k)$ eloszlású.

Sűrűségfüggvény:	$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^{k/2-1} e^{-x/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$
Várható érték:..... k	Módusz:..... $k-2$
Variancia:..... $2k$	Relatív szórás:..... $\sqrt{\frac{2}{k}}$



12. ÁBRA. A χ^2 -eloszlás már kis ($k=50$) szabadsági fok esetén is jól helyettesíthető $N(k, 2k)$ eloszlással.

8. Cauchy-eloszlás: $C(m, \gamma)$

Az eddig említett eloszlások mindegyike beleesik a normális eloszlás (centrális határeloszlás-tételen keresztül érvényesülő) vonzáskörébe, még a normális eloszlástól annyira különböző Bernoulli-eloszlás vagy az egészen ferde exponenciális eloszlás is. Az itt bemutatott Cauchy-eloszlás ellenkező példával szolgál: olyan eloszlásról van szó, amelyik alakjában emlékeztet ugyan a normálisra (l. a 14. ábrát), de **sem várható értéke, sem (véges) szórása nincsen**.

Sűrűségfüggvény: $f(x) = \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-m}{\gamma}\right)^2}$

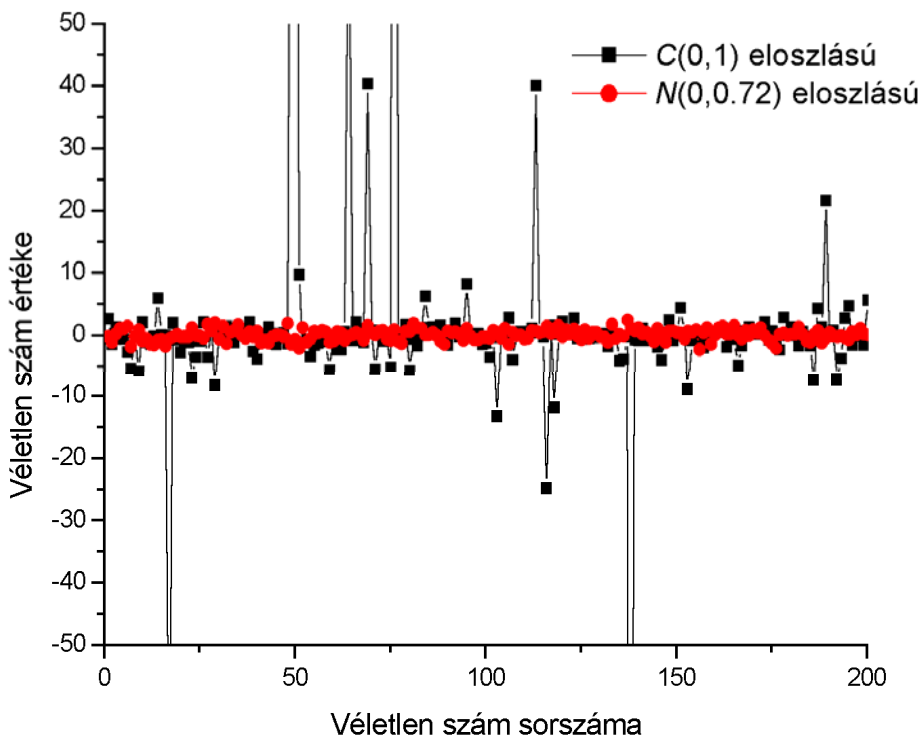
Eloszlásfüggvény: $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x-m}{\gamma}$

Várható érték, variancia, szórás: ☹️

Medián, módusz, szimmetriacentrum: m

Félértékszélesség (FWHM), kvartilis terjedelem: 2γ

A sűrűségfüggvény inflexió pontja: $m \pm \gamma / \sqrt{3}$

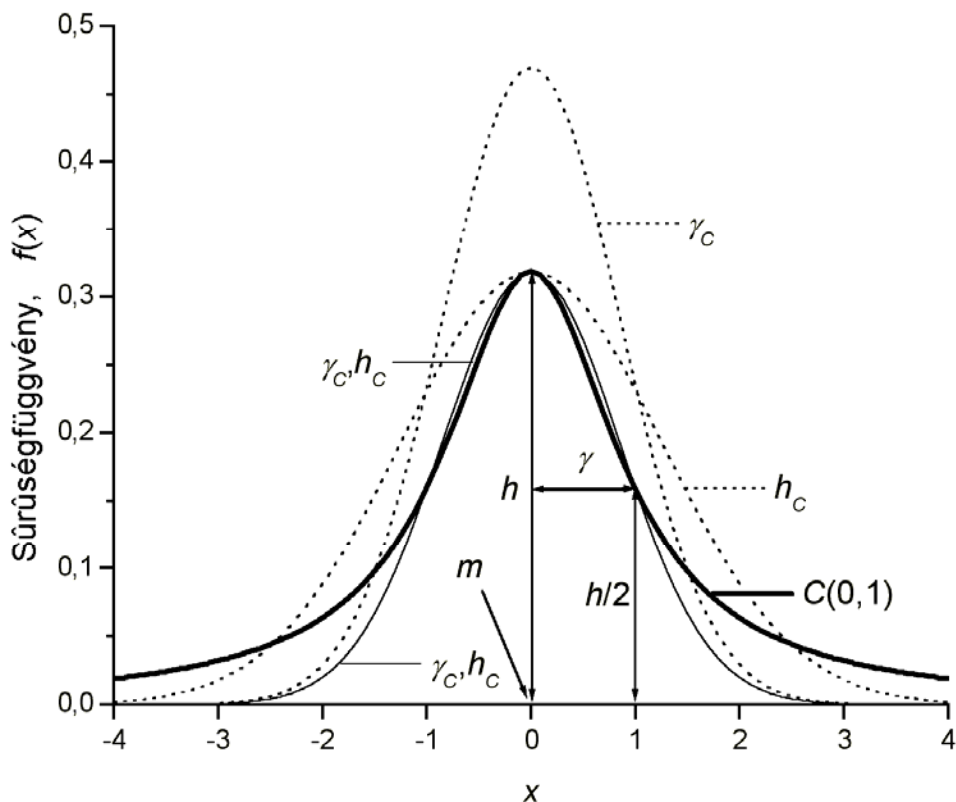


13. ÁBRA. Azonos félértékszélességű (HWHM=1) Cauchy- és normális eloszlású véletlen számok összehasonlítása. A Cauchy-féle adatok némelyike 500 körül van ebben a véletlen sorozatban. Ezzel szemben a normális adatok mindegyike a 3σ -nak megfelelő $0 \pm 2,5$ -es szűk sávba esik.

Érdekeség:

$$\Gamma \tau = \hbar$$

- τ : „**időbizonytalanság**” – konkrétan: szórás, mely az exponenciális élettartam-eloszlás esetében megegyezik a várható értéket jellemző közepes élettartammal
- Γ : „**energiabizonytalanság**” – konkrétan: a Cauchy-eloszlás félértékszélessége, $\Gamma=2\gamma$, tehát nem a szórása, minthogy az nem létezik ☹



14. ÁBRA. A $C(0, 1)$ **Cauchy**-eloszlás sűrűségfüggvénye (vastag vonal) három különböző Gauss-görbével összehasonlítva. A szaggatott vonallal jelölt görbék 1-re normált területű normális sűrűségfüggvények. Egyiknek a magassága (h_C), másiknak a szélessége (γ_C) van azonosra véve a Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvényével. A vékony folytonos vonal olyan 0,678-ra normált területű Gauss-görbét mutat, melynek mind magassága, mind szélessége megegyezik a Lorentz-görbével (γ_C, h_C). Ezen a görbén a legszembeszökőbb a két eloszlás különbsége: a **Lorentz-görbe** sokkal lassabban tart a 0-hoz, mint a **Gauss-görbe**, ami megmagyarázza a várható érték és a szórás hiányát a Cauchy-eloszlás esetében.

ADDÍCIÓS TÉTELEK

Az alábbiak az X_1 és X_2 valószínűségi változó függetlensége esetén állnak. Úgy kell a sorokat olvasni, hogy „ha X_1 eloszlása ilyen, és X_2 leoszlása olyan, akkor $X_1 + X_2$ eloszlása amolyan”.

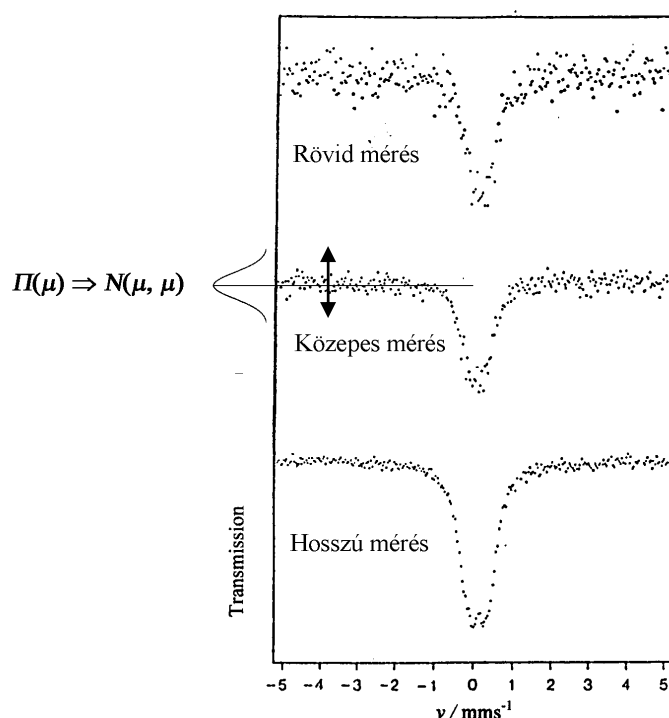
X_1 eloszlása	X_2 eloszlása	$X_1 + X_2$ eloszlása
$B(n_1, p)$	$B(n_2, p)$	$B(n_1 + n_2, p)$
$\Gamma(\mu_1)$	$\Gamma(\mu_2)$	$\Gamma(\mu_1 + \mu_2)$
$\chi(r_1, \nu)$	$\chi(r_2, \nu)$	$\chi(r_1 + r_2, \nu)$
$N(\mu_1, \sigma_1^2)$	$N(\mu_2, \sigma_2^2)$	$N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
$\chi^2(k_1)$	$\chi^2(k_2)$	$\chi^2(k_1 + k_2)$
$C(m_1, \gamma_1)$	$C(m_2, \gamma_2)$	$C(m_1 + m_2, \gamma_1 + \gamma_2)$

HATÁRELOSZLÁSOK

Úgy kell a sorokat olvasni, hogy „ha X eloszlása ilyen, és ez és ez teljesül, akkor X eloszlása közelíthető az alábbi határeloszlással”.

X eloszlása	Feltétel	X határeloszlása
$B(n, p)$	$p \leq 0,1$ $n \geq 20$	$\Gamma(np)$
$B(n, p)$	$npq \geq 6$ $q \equiv (1-p)$	$N(np, npq)$
$\Gamma(\mu)$	$\mu \geq 20$	$N(\mu, \mu)$
$\chi(r, \nu)$	$r \geq 30$	$N(r/\nu, r/\nu^2)$
$\chi^2(k)$	$k \geq 50$	$N(k, 2k)$

NUKLEÁRIS SPEKTRUMOK



15. ÁBRA. Adott „csatornában” – a spektrumot sokszor felvéve – normális szórásra számíthatunk a μ várható érték körül. Hosszabb mérési idő esetén μ arányosan nagyobb lesz, ezért $\sigma_{\text{rel}} = 1/\sqrt{\mu}$ miatt javul a „statisztika”. Vízszintesen – Mössbauer-spektrumról lévén szó – a Cauchy-eloszlás az „illetékes”, ti. a $\mu(x, \mathbf{a})$ **illesztő függvény** Lorentz-görbékéből áll.

SPEKTRUMILLESZTÉS

A **maximum likelihood elv** (a legnagyobb esély elve) szerint:

$$L(Y_i; \mathbf{a}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k \sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\frac{Y_i - \mu(x_i; \mathbf{a})}{\sigma_i}\right)^2\right) \Rightarrow \text{maximum}$$

Ebből adódik a **súlyozott legkisebb négyzetek módszere**:

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^k \left(\frac{Y_i - \mu(x_i; \hat{\mathbf{a}})}{\sigma_i}\right)^2 \Rightarrow \text{minimum}$$

Ha Y_i -k normálisak (márpedig azok), akkor az X_i -k

$$X_i = \frac{Y_i - \mu(x_i; \hat{\mathbf{a}})}{\sigma_i}$$

$N(0, 1)$ eloszlásúak, ezért a χ^2 négyzetösszeg $\chi^2(k)$ eloszlású, ill. közelítőleg $N(k, 2k)$ eloszlású lesz, hiszen a k csatornaszám akár több ezer is lehet.

A HOLTIDŐ HATÁSA

A gyakorlati spektrumkiértékelés során kihasználjuk, hogy a Poisson-eloszlás örökségeképp:

$$\sigma_i^2 = \mu_i \approx Y_i$$

és ezért a minimumfeladatot – praktikus okok miatt – így szoktuk átfogalmazni:

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^k \left(\frac{Y_i - \mu(x_i; \hat{\mathbf{a}})}{\sigma_i} \right)^2 \approx \sum_{i=1}^k \frac{(Y_i - \mu(x_i; \hat{\mathbf{a}}))^2}{Y_i} \Rightarrow \text{minimum}$$

A Poisson-folyamatnál láttuk, hogy az adott t idő alatt mért beütésszámok akkor és csak akkor Poisson-eloszlásúak, ha a jelek közti várakozási idők exponenciális eloszlásúak. A holtidő viszont elrontja a várakozási idők exponenciális eloszlását, ti. ilyenkor az i -edik várakozási idő így adható meg:

$$Z_i = \Theta_i + T_i$$

ahol Z_i a teljes várakozási idő két jel közt, Θ_i a (véletlenszerű vagy konstans) holtidő, és T_i az exponenciális eloszlású várakozási idő. Az utóbbi eloszlását (a 8. ábra, ill. az exponenciális eloszlás emlékezetnélkülisége szerint) a holtidő beiktatása által okozott „időcsonkolás” egyáltalán nem befolyásolja. Ellenben Z_i eloszlása már korántsem lesz exponenciális, hanem eloszlását Θ_i és T_i eloszlásának konvolúciója adja.

Ebből adódóan, ha azt kérdezzük, hogy t időtartam alatt hány jel jön be, akkor a válaszként kapott N_t beütésszám (ilyenek szerepelnek Y_i gyanánt a minimumfeladatban is) – a **felújítási folyamatok** körében tárgyalt valószínűségi változó – sem lehet Poisson-eloszlású. Ha történetesen konstans θ holtidővel számolunk, akkor:

$$D^2(N_t) = (1 - \theta \nu_\theta)^2 E(N_t) \leq E(N_t)$$

ahol az egyenlőség csak $\theta \nu_\theta \ll 1$ esetén teljesül. Tehát a **mért beütésszámok szórásának Poisson-becslése** (amikor is a varianciát a várható értékkel helyettesítjük) általában **túlbecsüli a tényleges szórást**.

Ez esetben közelebb járunk az igazsághoz, ha a kapott, holtidővel „torzított” χ_θ^2 -et $(1 - \theta \nu_\theta)^2$ -tel osztjuk, ahol $\theta \nu_\theta$ a **százalékos holtidő század része**.

$$\chi^2 = \frac{1}{(1 - \theta \nu_\theta)^2} \chi_\theta^2 = \alpha_\theta \chi_\theta^2$$

Ha a holtidő nem ismert, de mégis sejteni lehet, hogy ez áll az irreálisan kis χ^2 háttérben, akkor a bekeretezett egyenlet alapján következtethetünk az α_θ korrekciós faktorra, hiszen nyilván:

$$\alpha_\theta \equiv \frac{1}{(1 - \theta \nu_\theta)^2} = \frac{E(N_t)}{D^2(N_t)}$$

Például egy **transzmissziós Mössbauer-spektrum** esetében ez azt jelenti, hogy képezni kell az alapvonalhoz tartozó csatornatartalmak átlagát [$E(N_t)$ becslése] és empirikus szórásnégyzetét [$D^2(N_t)$ becslése]. Ezek aránya ugyanis a fenti egyenlet szerint a keresett korrekciós faktor becslésének tekinthető.